

УДК 541.12.011

ХИМИЯ

Член-корреспондент АН СССР В. Б. АЛЕКСОВСКИЙ,
А. М. АБАНЬШИН, В. Г. КОРСАКОВ, Б. В. СТЕПАНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ УДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Проблема развития удельной поверхности рассмотрена в общем виде и изучена экспериментально в наших работах по конструированию и химической сборке твердых тел ⁽¹⁾. Мы исходим из основной гипотезы, согласно которой строение твердого вещества определяется его остовом, т. е. цепью, сетью или каркасом межуатомных связей. Наличие в твердых телах полостей, каналов и вообще пор различного вида обусловлено двух- или трехмерным остовом. Наряду с моделью пористого тела — «губки» — нами была использована модель ворсистого тела — «щетки». «Губка» и «щетка» в некотором смысле дополняют друг друга: простейшую губку, пронизанную цилиндрическими каналами, можно получить, изъав из данного объема щетку, образованную цилиндрическими ворсинками того же размера, что и каналы в губке. Сравнивая условия массообмена губки и щетки с омывающим их потоком, нетрудно заметить ощутимую разницу: в губку вещество потока попадает лишь путем диффузии, тогда как к ворсу щетки оно транспортируется еще и конвективным путем (именно поэтому ребристая или ворсистая структура обеспечивает высокую эффективность жабер, кишечника). Возникает вопрос, какие геометрические условия предопределяют получение из данной массы вещества тела с наибольшей поверхностью и, в частности, какой тип тел (губка или щетка) может иметь более высокую удельную поверхность (при сопоставленных условиях).

Мы рассмотрим эту задачу в предположении, что профиль ворса (или поры) есть многоугольник или круг.

1. Терминология и обозначения. Будем считать, что рассматриваемые тела построены из стандартных элементарных ячеек и целиком располагаются внутри параллелепипеда Π высоты h с основанием B . Пусть основание B разбито на плоские ячейки фиксированного типа, примыкающие друг к другу по целым ребрам. Часть этих ячеек выделим в комплекс K_{Π} , над которым нарастим цилиндрические ворсинки щетки Π ; длину ворса обозначим через l . За базу щетки примем пластину толщины δ с основанием B , причем будем предполагать, что $h = l + 2\delta$ и l , δ больше ширины ϵ элементарной ячейки. Дополнительное тело $\Pi = \Pi \setminus \Pi$ назовем губкой, у нее такая же база, что и у Π , и ее вырезы складываются из цилиндров заданного профиля. Ясно, что вырезы Π полностью определяются комплексом K_{Π} , состоящим из всех ячеек, которые не вошли в комплекс K_{Π} .

Напомним, что комплекс K называют правильно раскрашенным двумя красками, если указаны два таких его подкомплекса K_1 и K_2 , что сумма K_1 и K_2 совпадает с K и любые его смежные ячейки принадлежат разным подкомплексам.

Условимся границу комплекса K обозначать bK , длину границы — $L(bK)$, площадь K — $S(K)$. Будем также обозначать $\rho(T)$, $m(T)$, $V(T)$ и $S(T)$ соответственно плотность, массу, объем и площадь поверхности тела T .

2. Зависимость удельной поверхности тела T от длины границы и площади комплекса K_T . По определению, удельная поверхность тела равна $\sigma(T) = S(T)/m(T)$. Положив для простоты плотность материала равной 1 (при этом $m(T) = V(T)$), получим

$$\sigma(T) = \frac{L(bK_T) + [\delta L(b\Pi) + 2S(\Pi)]/l}{S(K_T) + [\delta S(\Pi)]/l},$$

где в квадратных скобках заключены выражения, не зависящие от выбора тела T . Отсюда в условиях, когда массой и площадью поверхности базы тела можно пренебречь, получим

$$\sigma(T) = L(bK_T)/S(K_T).$$

3. Тела с многоугольным профилем элементарной ячейки. Пусть сначала на основании B задана произвольная триангуляция (т.е. разбиение B на треугольники), тогда если в комплекс K_T входит

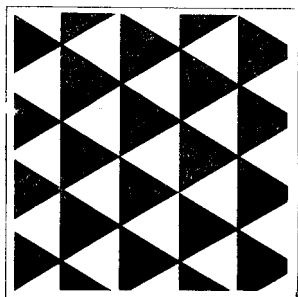


Рис. 1

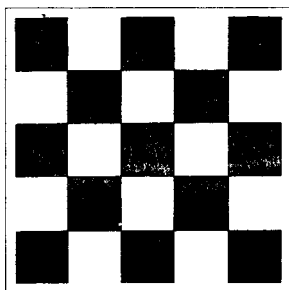


Рис. 2

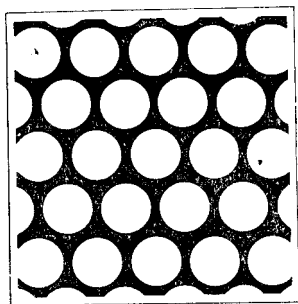


Рис. 3

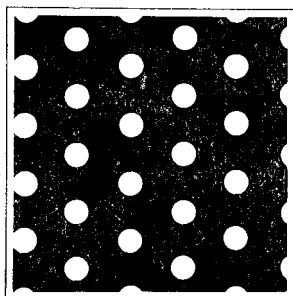


Рис. 4

хотя бы один треугольник Δ , смежный еще с двумя треугольниками из K_T , то подкомплекс $K_T = K_T \setminus \Delta$ отвечает телу T_1 , с большей удельной поверхностью. Значит, оптимальное тело отвечает комплексу, у которого клетки состоят не более, чем из 2 элементарных ячеек. Этот же вывод сохраняет силу для случая, когда плоские ячейки представляют собой квадраты со стороной ϵ .

Более точно, в каждом из случаев, когда профиль является правильным треугольником или квадратом справедливо следующее утверждение: при разбиении основания B на многоугольники одного из перечисленных видов максимум удельной поверхности σ^* достигается на таком теле Π , для которого комплекс K_{Π^*} вместе с K_{Π^*} дает правильную раскраску B при естественном предположении, что ϵ существенно меньше длины и ширины B . Далее, при условии, что массой и площадью поверхности базы можно пренебречь, получаем для треугольного профиля $\sigma_s^* = 6/\epsilon$, для квадратного профиля $\sigma_s^* = 4/\epsilon$.

Пренебрегая граничными эффектами, можно считать тела Π^* и Π^* одинаковыми (см. рис. 1 и 2). Таким образом, оптимальное тело является предельным случаем как щетки, так и губки.

4. Тела с круглым профилем ворса или выреза. Рассматривая эти тела, мы отступаем от первоначальных предположений об элементарной ячейке.

Отметим здесь следующие результаты.

Среди щеток Π с круглыми волокнами длины l и диаметра ε наибольшую удельную поверхность $\sigma^* = 4/\varepsilon$ имеет щетка, отвечающая наиплотнейшему расположению кругов диаметра ε на базе B . С другой стороны, заметим ⁽²⁾, что $\max \rho(\Pi)$ достигается при наиплотнейшей упаковке базы B равными кругами и не зависит от радиуса этих кругов (в предположении, что ε существенно меньше длины и ширины B). А поскольку $S(\Pi) = S(\Pi)$ и $\rho(\Pi) = 1 - \rho(\Pi)$, то для губки Π удастся выбрать минимальным $\rho(\Pi)$ за счет наиплотнейшей упаковки «пор» и $S(\Pi)$ максимальным за счет выбора диаметра «поры» наименьшим из возможных. Такая губка Π^* будет оптимальна, так как $\sigma(\Pi) = S(\Pi)/\rho(\Pi) \cdot V(\Pi)$.

При этом, если допустима нулевая толщина стенок губки, то оптимальная губка Π^* дополнительна оптимальной щетке Π^* и $\sigma(\Pi^*) \approx 33/\varepsilon$, где ε — диаметр пор; если же минимально допустимая толщина стенки равна диаметру самих пор, то мы получим лишь $\sigma(\Pi^*) = 1/\varepsilon$ (см. рис. 3 и 4).

Ленинградский технологический институт
им. Ленсовета

Поступило
5 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Б. Алесковский, ЖПХ, т. 47, 2145 (1974). ² Дж. Кассельс, Введение в геометрию чисел, М., 1965.