

Е. И. МОИСЕЕВ

ФОРМУЛА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 III 1975)

1. Формулы среднего значения для регулярных решений уравнений

$$u'' + \mu^2 u = 0; \quad (1)$$

$$\Delta u + \mu^2 u = 0 \quad (2)$$

хорошо известны и имеют соответственно вид

$$[u(y+r) + u(y-r)]/2 = u(y) \cos \mu r, \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} u(x + \theta r) d\theta = u(x) J_{(N-2)/2}(\mu r) / (r\mu)^{(N-2)/2}, \quad (4)$$

где $\int_0^{2\pi}$ — интеграл по углам, N — число измерений, $J_\nu(t)$ — функция Бесселя порядка ν . Формулы (3) и (4) систематически использовались В. А. Ильиным в работах, посвященных спектральным разложениям по собственным функциям оператора Лапласа (см., например, ^(1, 2)). Для собственных функций полигармонического оператора формула среднего значения была получена И. А. Шишмаревым в работе ⁽³⁾; для собственных функций самосопряженного дифференциального оператора с частными производными второго порядка формула среднего значения установлена автором ⁽⁴⁾.

В настоящей работе будет получена формула среднего значения для регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения порядка n

$$\tilde{u}^{(n)} + a_{n-2}(x)\tilde{u}^{(n-2)} + a_{n-3}(x)\tilde{u}^{(n-3)} + \dots + a_0(x)\tilde{u}(x) + \lambda\tilde{u} = u, \quad (5)$$

позволившая В. А. Ильину в ⁽⁵⁾ перенести на это уравнение метод, развитый в ^(1, 2).

Отметим, что уравнение общего вида порядка n

$$p_n(x)\tilde{u}^{(n)} + p_{n-1}(x)\tilde{u}^{(n-1)} + p_{n-2}(x)\tilde{u}^{(n-2)} + \dots + p_0(x)\tilde{u}(x) + \lambda\rho(x)\tilde{u} = u$$

при условии, что $p_n(x)$, $\rho(x)$ сохраняют знак на (a, b) и принадлежат классу $C^{(n)}(a, b)$, а $p_{n-1}(x) \in C^{(n-1)}(a, b)$, приводится путем замены переменной и замены функций $\tilde{u}(x)$ и $u(x)$ к виду (5) на интервале (a, b) . Формула среднего значения для регулярного решения уравнения (5) является обобщением формулы (3) и носит асимптотический характер при $\operatorname{Re} \mu \rightarrow \infty$, $|\operatorname{Im} \mu| \leq C$, где

$$\mu = \begin{cases} [(-1)^{n/2}(-\lambda)]^{1/n}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ (e^{-i\pi/2}\lambda)^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно, } \operatorname{Im} \lambda \geq 0; \\ (e^{i\pi/2}\lambda)^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно, } \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Под степенью $1/n$ числа $re^{i\varphi}$, где $r \geq 0$, $-\pi/2 \leq \varphi < 3\pi/2$, понимается выражение $(re^{i\varphi})^{1/n} = r^{1/n}e^{i\varphi/n}$.

В дальнейшем предполагается, что $p_n(x)/\rho(x)$ — действительная функция на (a, b) , а $p_{n-1}(x)$, $p_{n-2}(x)$, ..., $p_0(x)$ могут быть и комплекснознач-

ными. Поэтому $a_{n-2}(x), \dots, a_0(x)$ также могут быть комплекснозначными на (a, b) . Мы потребуем, чтобы $a_k(x) \in C^{(k+l)}(a, b)$. Кроме того вид формулы среднего значения не изменится, если a_k зависят от μ , но при этом должны быть выполнены условия

$$\left| \frac{\partial^j a_k}{\partial x^j} \right| \leq C |\mu|^{n-2-k+j}, \quad j=1, 2, \dots, k+l, \quad k=0, \dots, n-2.$$

Формула среднего значения, которая будет получена в дальнейшем, справедлива и для сопряженного к (5) уравнения

$$(-1)^n \bar{v}^{(n)} + (-1)^{n-2} (\bar{a}_{n-2} \bar{v})^{(n-2)} + (-1)^{n-3} (\bar{a}_{n-3} \bar{v})^{(n-3)} + \dots + \bar{a}_0 \bar{v} + \bar{\lambda} \bar{v} = \bar{v}, \quad (6')$$

причем $\bar{a}_k(x) \in C^{(k+l)}(a, b)$, черта над $a_k(x)$ означает комплексно-сопряженное выражение.

2. Вывод формулы среднего значения. Наметим схему вывода формулы среднего значения для уравнения четного порядка

$$\tilde{u}^{(2n)} + a_{2n-2} \tilde{u}^{(2n-2)} + \dots + a_0 \tilde{u} - (-1)^n \mu^{2n} \tilde{u} = u, \quad (7)$$

где $a_k(x) \in C^{(k+l)}(a, b)$, а μ определено согласно (6).

Для оператора $\Phi^{(2n)} - (-1)^n \mu^{2n} \Phi$ запишем фундаментальное решение в виде

$$\Phi(t) = \frac{C}{\mu^{2n-1}} \left\{ \sin \mu |t| + \sum_{k=1}^{n-1} A_k e^{i\mu \alpha_k t} \right\},$$

где $t = x - y$, $\alpha_k = e^{i\pi k/n}$, $k=1, 2, \dots, n-1$, A_k — постоянные, которые однозначно определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k (i\alpha_k)^{2m-1} = (-1)^m, \quad m=1, 2, \dots, n-1,$$

$$C = 1/2 \left\{ (-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (ie^{i\pi k/n})^{2n-1} \right\}^{-1}$$

Рассмотрим функцию

$$G(t) = \frac{C}{\mu^{2n-1}} \left\{ \left(\sin \mu |t| - \frac{\cos \mu t \sin \mu r}{\cos \mu r} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{2 \cos \mu r} [e^{i\mu \alpha_k (|t|-r)} + e^{-i\mu \alpha_k (|t|-r)}] \right\}.$$

Справедливы следующие равенства для $G(t)$:

$$G^{(k)}(r) = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, 2n-2; \quad (8)$$

$$G^{(2n-1)}(r) = 1/2 \cos \mu r. \quad (9)$$

Кроме того, $G(t)$ удовлетворяет уравнению

$$G^{(2n)} - (-1)^n \mu^{2n} G = \delta(t) + \frac{2C}{\cos \mu r} \left[\frac{\delta^{(2n-2)}(t)}{\mu^{2n-2}} \sum_{k=1}^{n-1} A_k i\alpha_k T_k + \right. \\ \left. + \frac{\delta^{(2n-4)}(t)}{\mu^{2n-4}} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (i\alpha_k)^3 T_k + \dots + \delta(t) \sum_{k=1}^{n-1} A_k T_k (i\alpha_k)^{2n-1} \right] \quad (10)$$

где $T_k = \cos(\mu \alpha_k r) - \cos \mu r$.

Если применить формулу Грина к функциям $\tilde{u}$ и $G(x-y)$, а также учесть равенства (7) — (10), то получим после некоторых преобразований

$$\frac{\tilde{u}(y+r) + \tilde{u}(y-r)}{2} = \tilde{u}(y) \cos \mu r + 2C \sum_{k=1}^{n-1} T_k X_k + \\ + \frac{1}{\mu} \int_{y-r}^{y+r} (P_1 + \operatorname{sgn} t P_2) \tilde{u}(x) dx + \frac{1}{\mu^{2n-1}} \int_{y-r}^{y+r} P_3 u(x) dx, \quad (11)$$

где

$$P_1 = C \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{\mu^{2n-2-2j}} b_{2j}(x) \sin \mu(|t|-r) + \\ + \frac{C}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_k (i\alpha_k)^{2j} b_{2j}}{\mu^{2n-2-2j}} [e^{i\mu\alpha_k|t|} (e^{-i\mu\alpha_k r} - 2T_k) - e^{-i\mu\alpha_k(|t|-r)}], \\ P_2 = C \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{\mu^{2n-2j-3}} b_{2j+1} \cos \mu(|t|-r) + \frac{C}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{A_k (i\alpha_k)^{2j+1}}{\mu^{2n-2j-2}} b_{2j+1} \cdot \\ \cdot [e^{i\mu\alpha_k|t|} (e^{-i\mu\alpha_k r} - 2T_k) + e^{-i\mu\alpha_k(|t|-r)}], \\ P_3 = -C \sin \mu(|t|-r) - \frac{C}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_k [e^{i\mu\alpha_k|t|} (e^{-i\mu\alpha_k r} - 2T_k) - e^{-i\mu\alpha_k(|t|-r)}], \\ X_k = \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{u}^{(2m)}(y) A_k (i\alpha_k)^{2n-2m-1} + A_k \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-1} (b_{2j} \tilde{u})^{(2)}_{x=y} \frac{(i\alpha_k)^{2j-2l-1}}{\mu^{2n+2l-2j}} + \right. \\ \left. + A_k \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{(b_{2j+1} \tilde{u})^{(2l+1)}_{x=y} (i\alpha_k)^{2j-2l-1}}{\mu^{2n+2l-2j}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} A_k \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(i\alpha_k)}{\mu^{2n-2j-1}} \int_{y-r}^{y+r} \tilde{u} e^{i\mu\alpha_k|t|} dx - \frac{A_k}{2\mu^{2n-1}} \int_{y-r}^{y+r} u(x) e^{i\mu\alpha_k|t|} dx + \right. \\ \left. + \frac{A_k}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(i\alpha_k)^{2j+1}}{\mu^{2n-2j-1}} \int_{y-r}^{y+r} b_{2j+1} \operatorname{sgn} t \tilde{u} e^{i\mu\alpha_k|t|} dx \right\};$$

здесь $b_l(x)$ представляет собой линейную комбинацию функций $a_{(\widehat{k})}(x)$, где $j=0, 1, 2, \dots, k$; $k=0, 1, 2, \dots, 2n-2$.

Применяя формулу (11) при $r=R=R_0, R_1(\mu), R_2(\mu), \dots, R_{(n-2)/2}(\mu)$, где R такое число, что $(y-R, y+R) \subset (a, b)$, а

$$\frac{R}{(2n^2)^j} \leq R_j(\mu) \leq \frac{R}{(2n^2)^j} \frac{11}{10}, \quad j=0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2},$$

получим систему уравнений, из которой найдем $X_k(r, y, \mu)$. Найденные X_k подставим в формулу (11). При этом получится формула, которая справедлива при $r \leq R/(2n^2)^{n/2}$, $|\operatorname{Im} \mu| \leq C$, $|\operatorname{Re} \mu| \geq C$, имеет вид

$$\frac{\tilde{u}(y+r) + \tilde{u}(y-r)}{2} = \tilde{u}(y) \cos \mu r + \frac{1}{\mu} \int_{y-r}^{y+r} (P_1 + \operatorname{sgn} t P_2) \tilde{u}(x) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\mu^{2n-1}} \int_{y-r}^{y+r} P_3 u(x) dx + \frac{1}{\mu} \int_{R \geq |t| \geq r} (Q_1 + Q_2 \operatorname{sgn} t) \tilde{u}(x) dx + \\
& + \frac{1}{\mu^{2n-1}} \int_{R \geq |t| \geq r} Q_3 u(x) dx + \int_{y-R}^{y+R} F_1 \tilde{u}(x) dx + \int_{y-R}^{y+R} F_2 u(x) dx + \\
& + \sum_{m=0}^{2n-2} \sum_{j=0}^{(n-2)/2} \sum_{\alpha=1}^3 F_{j+3,m,\alpha} \tilde{u}^{(m)}(y+R_{j\alpha}),
\end{aligned}$$

где P_1, P_2, P_3 — определенные выше функции, для которых справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} P(x, y, r, \mu) \right| \leq C |\mu|^\beta, \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, l, \quad (12)$$

где $y \in (a_1, b_1)$, $x \in (y-r, y+r)$, $(a_1-R, b_1+R) \subset (a, b)$.

Для функций Q_1, Q_2, Q_3 справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^\beta Q}{\partial x^\beta}(x, y, r, R, \mu) \right| \leq \begin{cases} C |\mu|^\beta e^{-a|\mu|(|t|-r)}, & |\mu r| \geq 1 \\ C |\mu|^\beta e^{-a|\mu||t|} |\mu r|^2, & |\mu r| < 1 \end{cases}, \quad (13)$$

где $a > 0$, $y \in (a_1, b_1)$, t удовлетворяет неравенству $R \geq |t| \geq r$, а $\bar{R} = 2R/(2n^2)^{n/2}$.

Кроме того, для P и Q справедливы оценки

$$\left| \int P dr \right| \leq \frac{C}{|\mu|}, \quad y \in (a_1, b_1), \quad |x-y| \leq r, \quad r \leq \frac{R}{(2n^2)^{n/2}}, \quad (14)$$

$$\left| \int Q dr \right| \leq \begin{cases} \frac{C}{|\mu|} e^{-a|\mu|(|t|-r)}, & |\mu r| \geq 1 \\ \frac{C}{|\mu|} e^{-a|\mu||t|}, & |\mu r| < 1, \end{cases} \quad (15)$$

где $y \in (a_1, b_1)$, $\bar{R} \leq t \leq r$, $r \leq R/2(2n^2)^{n/2}$.

Для функций $F_{j,m,\alpha}$ справедлива оценка

$$|F_{j,m,\alpha}(x, y, r, R, \mu)| \leq \begin{cases} C e^{-a|\mu|}, & |\mu r| \geq 1, \\ C e^{-a|\mu|} |\mu r|^2, & |\mu r| < 1, \end{cases} \quad (16)$$

где $y \in (a_1, b_1)$, $|x-y| \leq R$, и $R_{j1} = R_j(\mu)$, $R_{j2} = 0$, $R_{j3} = -R_j(\mu)$.

В случае нечетного n формула имеет такой же вид, если коэффициенты уравнения $a_h(x) \in C^{(h+t-n)}$. Если же коэффициенты $a_h \in C^{(h+1)}$, то формулу среднего значения можно получить аналогичным методом, что предполагается сделать при более подробной публикации.

В заключение автор выражает благодарность проф. В. А. Ильину за постоянное внимание и обсуждение данной работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Ильин, УМН, т. 23, № 2 (1968). ² В. А. Ильин, ДАН, т. 198, № 4 (1971).
³ И. А. Шишмарев, ДАН, т. 186, № 4 (1969). ⁴ Е. И. Моисеев, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 8 (1971). ⁵ В. А. Ильин, ДАН, т. 223, № 3 (1975).