

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. БАБЕШКО

**К ФАКТОРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ,
ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 8 IV 1975)

В работе ⁽¹⁾ предложен метод факторизации одного класса матриц-функций, реализованный на матрицах второго порядка. Этот метод предполагает факторизацию производить в три этапа. Наиболее трудным из них является первый — нормализация; два других этапа чисто технические. Если удастся нормализовать произвольную матрицу-функцию, то фактически она будет факторизована.

К сожалению, общий метод нормализации произвольных матриц-функций построить не удастся. Поэтому приходится выделять определенные их классы, которые различаются по асимптотическому поведению элементов на обоих бесконечностях вещественной оси. Выбор классов матриц-функций диктуется прежде всего прикладными задачами.

В настоящей заметке излагается упомянутый в работе ⁽¹⁾ метод нормализации возникающих в задачах теории упругости матриц-функций порядка N , основанный на использовании теории регулярных пучков матриц.

В результате проблема нормализации матрицы-функции приводится к проблеме факторизации функций, которая детально изучена. В качестве примера рассмотрен случай матриц-функций, встречающихся в пространственных контактных задачах теории упругости.

1. Рассматривается квадратная матрица-функция $K(u)$ порядка N с элементами, обладающими свойствами элементов матрицы $K(u)$ работы ⁽¹⁾. Предполагается, что при $u \rightarrow \pm\infty$ асимптотика элементов имеет вид

$$|u| K(u) = \|a_{mn} + b_{mn} \operatorname{sign} u + O(u^{-\varepsilon})\|, \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Считаем, что частные индексы — нули, определители $\det K(u)$, $\det \|a_{mn} + b_{mn} \operatorname{sign} u\|$ отличны от нуля.

Наличие отличных от нуля частных индексов в данном случае не принципиально; трудности, связанные с их существованием, переносятся на второй этап, где приближенно факторизуется матрица-функция, принадлежащая распадающейся алгебре ⁽¹⁾.

2. Для нормализации матрицы-функции $K(u)$ введем линейный пучок матриц

$$A + \lambda B, \quad A = \|a_{mn}\|, \quad B = \|b_{mn}\|, \quad (2)$$

который в силу условий, наложенных на матрицы A и B , является регулярным ⁽²⁾. На основании теории регулярных пучков матриц всегда можно построить две постоянные невырожденные матрицы P и Q порядка N такие, что

$$P(A + \lambda B)Q = C + \lambda D, \quad (3)$$

причем $C + \lambda D$ — квадратная квазитреугольная матрица порядка N ; отличными от нуля у нее являются лишь диагональные элементы и могут отличаться от нуля элементы первой наддиагонали.

Введем в рассмотрение матрицы-функции вида

$$R(u) = (u^2 + a^2)^{-0.5} A + u(u^2 + a^2)^{-1} B, \quad (4)$$

$$M(u) = (u^2 + a^2)^{-0.5} C + u(u^2 + a^2)^{-1} D, \quad a > 0.$$

Матрица $M(u)$, как треугольная, факторизуется⁽³⁾, причем для этого достаточно факторизовать некоторые функции. Факторизовав $M(u)$ (ограничимся правосторонней факторизацией, аналогично выполняется левосторонняя), можем построить факторизацию и матрицы-функции $R(u)$. Действительно, если

$$M(u) = M_-(u) M_+(u), \quad (5)$$

то имеем

$$R(u) = R_-(u) R_+(u), \quad (6)$$

$$R_-(u) = P^{-1} M_-(u) S, \quad R_+(u) = S^{-1} M_+(u) Q^{-1};$$

здесь S — постоянная невырожденная матрица.

Несложный анализ позволяет установить, что при $S = I$ имеет место соотношение

$$R_-^{-1}(u) K(u) R_+^{-1}(u) = I + O(u^{-\kappa}), \quad u \rightarrow \pm\infty, \quad (7)$$

$$\kappa = \min(\epsilon, 1);$$

Здесь матрица I единичная порядка N , а матрица O имеет элементы, убывающие степенным образом на бесконечности, являющиеся регулярными на контуре σ , в частности, на вещественной оси⁽⁴⁾. Определитель матрицы $I + O$ отличен от 0 на σ , поэтому матрица принадлежит распадающейся алгебре. Таким образом, матрица $K(u)$ нормализована.

Дальнейшая факторизация матрицы $K(u)$ предполагает аппроксимацию матрицы (7) матрицей с рациональными элементами с точностью, обеспечивающей неравенство (5) работы⁽⁴⁾, выполненное для суммы из N членов.

Заключительная часть факторизации матрицы $K(u)$ состоит в решении системы уравнений на полуоси вида (16) с ядром (17) работы⁽⁴⁾. После этого формулы (17) указанной работы дают представление матриц-функций, полученных после факторизации матрицы-функции $K(u)$.

З а м е ч а н и е. Для нормализации матрицы-функции $K(u)$ нет нужды точно факторизовать матрицу-функцию $M(u)$: достаточно ее нормализовать, т. е. построить матрицы-функции $M_{\pm}(u, 0)$ такие, что

$$M_-^{-1}(u, 0) M(u) M_+^{-1}(u, 0) = I + O(u^{-\kappa}), \quad u \rightarrow \pm\infty.$$

Заменив ими в соотношениях (6) матрицы $M_{\pm}(u)$, вновь приходим к соотношению (7).

3. В качестве примера рассмотрим задачу о контакте с трансверсально изотропным упругим слоем гибкого штампа при наличии сцепления в области контакта. В случае гибкого штампа в области контакта задается поле (достаточно гладкое) смещений, дающее проекции на все три координатные оси. Штамп, в частности, может вибрировать.

Задача сводится к решению системы трех двумерных интегральных уравнений с тремя неизвестными. Применяя для решения этой системы, заданной в произвольной области, в случае тонкого слоя метод, использованный в работах^(4, 5), приходим к необходимости факторизовать матрицу $K(u)$ с описанными в п. 1 свойствами. Факторизацию необходимо осуществлять в статических задачах относительно вещественной оси, в динамической — относительно контура σ .

Матрица $K(u)$ третьего порядка обладает при $u \rightarrow \pm\infty$ асимптотикой (1), причем

$$b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = b_{33} = a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0;$$

остальные коэффициенты отличны от нуля. В изотропном случае они имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_1 \cos^2 \gamma + c_2 \sin^2 \gamma, & a_{12} &= a_{21} = (c_1 - c_2) \cos \gamma \sin \gamma, \\ a_{22} &= c_1 \sin^2 \gamma + c_2 \cos^2 \gamma, & b_{13} &= -b_{23} = c_3 \cos \gamma, \\ b_{23} &= -b_{32} = c_3 \sin \gamma, & a_{33} &= c_1, & c_1 &= 2(1-\nu), \\ c_2 &= 2, & c_3 &= (1-2\nu)i, & 0 \leq \gamma &< 2\pi, & 0 < \nu < 0,5. \end{aligned} \quad (8)$$

Вводя линейный пучок (2), находим

$$\det(A + \lambda B) = \Delta(1 + \lambda^2 \kappa^2); \quad (9)$$

здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2), & \kappa^2 &= (a_1a_3 + a_2a_4)\Delta^{-2}, \\ a_1 &= (a_{22}b_{13} - a_{12}b_{23})a_{33}, & a_2 &= (a_{11}b_{23} - a_{12}b_{13})a_{33}, \\ a_3 &= (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})b_{13}, & a_4 &= a_3b_{23}b_{13}^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если $\Delta \neq 0$, то пучок регулярен.

В изотропном случае имеем

$$\Delta = 8(1-\nu^2), \quad \kappa = (1-2\nu)/2(1-\nu). \quad (11)$$

Используя теорию регулярных пучков, можно построить две постоянные невырожденные матрицы P и Q такие, что пучок преобразуется к виду (3), в котором $C \equiv I$, а матрица D диагональная, на главной диагонали которой стоят элементы κ , $-\kappa$ и 0.

Таким образом, задача свелась к факторизации диагональной матрицы $M(u)$ с элементами $\Phi(u, k)$ на главной диагонали вида

$$\Phi(u, k) = (u^2 + a^2)^{-0,5} [1 + u(u^2 + a^2)^{-0,5} \kappa \delta_k], \quad (12)$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \delta_3 = 0.$$

В соответствии с замечанием нормализации матрицы $M(u)$ осуществляется вместе с нормализацией функций $\Phi(u, k)$. В частности, поскольку при $|\kappa| < 1$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} m_-^{-1}(u, k) \Phi(u, k) m_+^{-1}(u, k) &= 1 + O(u^{-1}), & u &\rightarrow \pm\infty, \\ m_{\pm}(u, k) &= (a \pm iu)^{-\theta_{\pm}(k)} (1 - \kappa^2)^{-0,25}, \\ \theta_{\mp}(k) &= 0,5 \mp i\pi^{-1} \operatorname{arctg} \kappa \delta_k, \end{aligned} \quad (13)$$

то в качестве $M_{\mp}(u, 0)$ можно взять диагональные матрицы с элементами $m_{\mp}(u, k)$ соответственно.

Для уточнения факторизации (13) можно использовать полиномы Бернштейна.

На основании полученных формул можно делать заключение о характере особенностей, которыми обладают контактные напряжения под гибким штампом на ортотропном слое вблизи границы штампа. При $|\kappa| < 1$ могут встретиться лишь особенности, описываемые функциями

$$\operatorname{Re} r^{-\theta_{\mp}(k)}, \quad r \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Применяя методы, развитые для решения интегральных уравнений в работе (6), можно решать задачи о взаимодействии с упругими слоистыми средами не только гибких штампов, но и упругих плит при наличии жесткого сцепления.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР И. И. Воровича за внимание к работе и обсуждение результатов.

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступило
24 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. А. Бабешко, ДАН, т. 223, № 5 (1975). ² Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», 1967. ³ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, т. 13, в. 2 (1968). ⁴ В. А. Бабешко, ДАН, т. 204, № 3 (1972). ⁵ В. А. Бабешко, ДАН, т. 206, № 5 (1975). ⁶ В. А. Бабешко, ДАН, т. 220, № 6 (1975).