

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. БИЦАДЗЕ

# К ВОПРОСУ О ПОСТАНОВКЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть на плоскости действительных переменных  $x, y$  задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка гиперболического типа

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \quad (1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами. Через каждую точку  $(x_0, y_0)$  проходят по две характеристических кривых уравнения (1)

$$L_1: l_1(x, y) = 0, \quad L_2: l_2(x, y) = 0,$$

разделяющих плоскость на четыре характеристические угла  $D, D_1, D_2, D_3$ . Хорошо известно, что при отсутствии вырождения типа в каждом из этих углов, например, в  $D$ , правильно поставлена так называемая характеристическая задача (или задача Гурса) определения регулярного в  $D$  решения  $u(x, y)$  уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha(x, y), & (x, y) \in L_1, \\ u(x, y) &= \beta(x, y), & (x, y) \in L_2. \end{aligned}$$

Когда  $A, B, C, a, b, c$  — квадратные матрицы порядка  $n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  — заданный, а  $u = (u_1, \dots, u_n)$  — искомый векторы и система (1) гиперболическа, при постановке характеристической задачи следует проявить осторожность.

Система

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

является гиперболической, так как ее характеристический детерминант

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$$

имеет действительные двухкратные корни  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ . Плоскость переменных  $x, y$  покрыта сетью характеристик системы (2), представляющих собой прямые  $x - y = \text{const}, x + y = \text{const}$ .

Пусть область  $D$  — угол, ограниченный прямыми  $x - y = 0, x + y = 0, x \geq 0$ .

Задача определения регулярного в  $D$  решения  $u = (u_1, u_2)$  системы (2), удовлетворяющего условиям

$$u_i(x, x) = \alpha_i(x), \quad u_i(x, -x) = \beta_i(x), \quad x \geq 0, \quad \alpha_i(0) = \beta_i(0), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

поставлена некорректно. Чтобы в этом убедиться, запишем эту систему в виде

$$\frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 (u_1 - u_2)}{\partial \eta^2} = 0, \quad (4)$$

где  $\xi = x + y, \eta = x - y$ .

Из (4) следует, что общее решение системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= (x+y)\varphi(x-y) + (x-y)\varphi_1(x+y) + \psi(x-y) + \psi_1(x+y), \\ u_2 &= (x+y)\varphi(x-y) - (x-y)\varphi_1(x+y) + \psi(x-y) - \psi_1(x+y), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1$  — произвольные действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

На основании (5) заключаем, что: 1) соответствующая (2), (3) однородная задача ( $\alpha_i = \beta_i = 0, i=1, 2$ ) имеет нетривиальные решения

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= (x^2 - y^2) [\varphi^*(x-y) + \varphi_1^*(x+y)], \\ u_2(x, y) &= (x^2 - y^2) [\varphi^*(x-y) - \varphi_1^*(x+y)], \end{aligned}$$

где  $\varphi^*, \varphi_1^*$  — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, 2) неоднородная задача (2), (3) не всегда разрешима, 3) корректно поставлена задача отыскания регулярного в области  $D$  решения  $u = (u_1, u_2)$  системы (2), удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \alpha_1(x), \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_1 - u_2) = \beta_1(x), \quad y = x, \quad x > 0, \\ u_1 + u_2 &= \alpha_2(x), \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_1 + u_2) = \beta_2(x), \quad y = -x, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

4) когда  $D$  представляет собой область, ограниченную кривыми, заданными уравнениями

$$L_1: y = \gamma_1(x), \quad L_2: y = \gamma_2(x), \quad x \geq 0,$$

где  $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \gamma_2(x) &< \gamma_1(x), \quad -k < \gamma_2'(x) < \gamma_1'(x) < k, \quad x > 0, \\ \gamma_1(0) &= \gamma_2(0) = 0, \quad 0 < k = \text{const} < 1, \end{aligned}$$

корректно поставлена задача определения регулярного в  $D$  решения  $u = (u_1, u_2)$  системы (2) с наперед заданными на  $L_1$  и  $L_2$  значениями

$$u_1(x, y) = \alpha_i(x), \quad (x, y) \in L_i, \quad u_2(x, y) = \beta_i(x), \quad (x, y) \in L_i, \quad (7)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, i=1, 2$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем  $\alpha_i(0) = \beta_i(0)$ .

Решения задачи (2), (6) даются формулой

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \frac{1}{4}(x+y)\beta_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{4}(x-y)\beta_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ u_2(x, y) &= \frac{1}{4}(x+y)\beta_2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{4}(x-y)\beta_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha_2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{x+y}{2}\right), \end{aligned}$$

а решение задачи (2), (7) — формулой (5), в которой

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{v_1 - v_2}(a_1 + b_1 - a_2 - b_2), \quad \psi(t) = \frac{1}{v_1 - v_2}(v_1 a_2 + v_1 b_2 - v_2 a_1 - v_2 b_1), \\ x - \gamma_i(x) &= t, \quad x = \mu_i(t), \quad x + \gamma_i(x) = \mu_i(t) + \gamma_i(\mu_i(t)) = v_i(t), \\ 2a_i(t) &= \alpha_i(\mu_i(t)), \quad 2b_i(t) = \beta_i(\mu_i(t)), \quad i=1, 2, \end{aligned}$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2}(c_1 - d_1 - c_2 + d_2), \quad \psi_1(t) = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2}(\delta_1 c_2 - \delta_1 d_2 - \delta_2 c_1 + \delta_2 d_1),$$

$$x + \gamma_i(x) = t, \quad x = \rho_i(t), \quad x - \gamma_i(x) = \rho_i(t) - \gamma_i(\rho_i(t)) = \delta_i(t),$$

$$2c_i(t) = \alpha_i(\rho_i(t)), \quad 2d_i(t) = \beta_i(\rho_i(t)), \quad i=1, 2.$$

Не следует думать, что некорректность постановки задачи (2), (3) вызвана кратностью корней соответствующего системе (2) характеристического детерминанта. В этом убеждаемся на примере системы

$$4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 10 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad (8)$$

характеристический детерминант которой

$$\Delta(\lambda) = 4\lambda^4 - 5\lambda^2 + 1$$

имеет простые корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1/2, \quad \lambda_4 = -1/2.$$

Семейства прямых

$$y - x = \text{const}, \quad y + x = \text{const}, \quad y - 1/2x = \text{const}, \quad y + 1/2x = \text{const}$$

являются характеристиками системы (8).

Пусть на этот раз  $D$  представляет собой область, ограниченную характеристиками

$$L_1: y = 1/2x, \quad L_2: y = -1/2x, \quad x \geq 0.$$

Задача нахождения регулярного в области  $D$  решения  $u = (u_1, u_2)$  системы (8), удовлетворяющего условиям

$$u_i(x, 1/2x) = \alpha_i(x), \quad u_i(x, -1/2x) = \beta_i(x), \quad x \geq 0, \quad (9)$$

поставлена некорректно. Это следует из общего представления решений  $u = (u_1, u_2)$  системы (8):

$$u_1 = 2\varphi_1(y+x) + 2\varphi_2(y-x) + 5\varphi_3(y+1/2x) + 5\varphi_4(y-1/2x),$$

$$u_2 = -\varphi_1(y+x) + \varphi_2(y-x) - 2\varphi_3(y+1/2x) + 2\varphi_4(y-1/2x),$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  — произвольные действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции. В частности, соответствующая (8), (9) однородная задача имеет нетривиальное решение

$$u_1(x, y) = y^2 - 1/4x^2, \quad u_2(x, y) = 0.$$

В области  $D$ , ограниченной кривыми с непрерывной кривизной

$$L_1: y = \gamma_1(x), \quad L_2: y = \gamma_2(x),$$

где

$$\gamma_2 < \gamma_1, \quad -k < \gamma_2' < \gamma_1' < k, \quad \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0, \quad 0 < k = \text{const} < 1/2,$$

корректно поставлена задача нахождения регулярного решения  $u = (u_1, u_2)$  системы (8) по заданным на  $L_1$  и  $L_2$  значениям  $u_1$  и  $u_2$ .

Указанные выше обстоятельства имеют место не только в случае двух независимых переменных. Так, например, система

$$\left\| \begin{array}{cccc} \Delta, & \Delta_1, & \Delta_2, & 0 \\ \Delta_1, & \Delta, & 0, & \Delta_2 \\ \Delta_2, & 0, & \Delta, & -\Delta_1 \\ 0, & \Delta_2, & -\Delta_1, & \Delta \end{array} \right\| u = 0, \quad (10)$$

где  $u=(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \Delta_1 = 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \right),$$

$$\Delta_2 = 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \right)$$

гиперболична, поскольку ее характеристическим детерминантом является функция  $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + \lambda_4^2)^4$ . Система (10) имеет нетривиальные решения

$$\begin{aligned} u_1 &= (x^2 - y^2 - z^2 + t^2) [\varphi_1(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy - 2zt) + \\ &\quad + \varphi_3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2zt)], \\ u_2 &= (x^2 - y^2 - z^2 + t^2) [\varphi_1(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy - 2zt) - \\ &\quad - \varphi_3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2zt)], \\ u_3 &= (x^2 - y^2 - z^2 + t^2) [\varphi_2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2zt) + \\ &\quad + \varphi_4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy - 2zt)], \\ u_4 &= (x^2 - y^2 - z^2 + t^2) [\varphi_2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2zt) - \\ &\quad - \varphi_4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy - 2zt)], \end{aligned} \quad (11)$$

исчезающие на характеристическом многообразии  $x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 0$  этой системы. Тот факт, что формулы (11) при произвольных дважды непрерывно дифференцируемых  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  дают решение системы (10), проверяется легко, если пользоваться эквивалентными записями равенств (10) и (11) в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) (u_1 - u_2) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) (u_3 - u_4) &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) (u_1 - u_2) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (u_3 - u_4) &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (u_1 + u_2) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) (u_3 + u_4) &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) (u_1 + u_2) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) (u_3 + u_4) &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 2(\xi\eta - \xi\tau)\varphi_1(\eta^2 + \tau^2), \\ u_3 + u_4 &= 2(\xi\eta - \xi\tau)\varphi_2(\xi^2 + \xi^2), \\ u_1 - u_2 &= 2(\xi\eta - \xi\tau)\varphi_3(\xi^2 + \xi^2), \\ u_3 - u_4 &= 2(\xi\eta - \xi\tau)\varphi_4(\eta^2 + \tau^2) \end{aligned}$$

соответственно, где  $\xi = x + y, \eta = x - y, \xi = z + t, \tau = z - t$ .

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
11 V 1975