

В. Г. ГАБДУЛХАЕВ

АППРОКСИМАЦИЯ В H -ПРОСТРАНСТВАХ И ПРИЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. М. Никольским 24 I 1975)

Пусть всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$, $r \geq 0$ целое. Как обычно ⁽¹⁻³⁾, будем говорить, что измеримая 2π -периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $H_p^{r+\alpha}$, если она имеет r -ю производную $f^{(r)}(x) \in L_p$, удовлетворяющую условию $H_p(f^{(r)}; \alpha) < \infty$, где

$$H_p(f^{(r)}; \alpha) = \sup_{h \neq 0} \frac{\|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)\|_p}{h^\alpha} \text{ при } 0 < \alpha < 1,$$

$$H_p(f^{(r)}; \alpha) = \sup_{h \neq 0} \frac{\|f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h)\|_p}{h} \text{ при } \alpha = 1.$$

Известно, что классы С. М. Никольского $H_p^{r+\alpha}$ являются банаховыми пространствами с нормой

$$\|f\|_{H_p^{r+\alpha}} = \|f\|_{r+\alpha; p} = \|f\|_p + H_p(f^{(r)}; \alpha), \quad \|f\|_p = \|f\|_{L_p}. \quad (1)$$

В дальнейшем будем считать, что $H_p^0 = L_p$, $L_\infty = C$, $H_\infty(f; \alpha) = H(f; \alpha)$.

Обозначим через $\mathcal{H}_n^r$ множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n . Ниже существенным образом используется следующая хорошо известная ⁽¹⁾

Теорема. Для принадлежности функции $f(x)$ к классу $H_p^{r+\alpha}$ необходимо и достаточно, чтобы $E_n(f)_p \leq a_0 n^{-r-\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, $n = 1, 2, \dots$, где $E_n(f)_p$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ полиномами из $\mathcal{H}_n^r$ по метрике L_p .

Пусть $E_n(f)_{\beta; p}$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ полиномами из $\mathcal{H}_n^r$ по метрике пространства H_p^β , $0 < \beta \leq 1$. Справедлива

Теорема 1. Для того чтобы $f(x) \in H_p^{r+\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы при любых β , $0 < \beta \leq 1$, выполнялось неравенство

$$E_n(f)_{\beta; p} \leq a_1 n^{-r-\alpha+\beta}, \quad r+\alpha \geq \beta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следствие. Если $f(x) \in H_p^{r+\alpha}$, то существует полином $T_n(x) \in \mathcal{H}_n^r$ такой, что при любых $0 < \beta \leq 1$ и $k = 0, 1, \dots, r$ справедливы оценки

$$\|f^{(k)}(x) - T_n^{(k)}(x)\|_{\beta; p} \leq a_2 H_p(f^{(r)}; \alpha) n^{-r-\alpha+k+\beta}, \quad r+\alpha \geq k+\beta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

которые на всем классе $H_p^{r+\alpha}$ неулучшаемы в смысле порядка.

Отметим, что при $p = \infty$, $k = 0$ из (2) следует лемма 1 работы ⁽⁴⁾.

Рассмотрим сингулярный оператор с ядром типа Гильберта ⁽⁵⁾

$$If = I(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} dt, \quad (3)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу. Как показал М. Рисс (см., например, ⁽⁶⁾, стр. 566; ⁽⁷⁾, стр. 404), I является ограниченным оператором в пространстве L_p с обычной нормой при любых $1 < p < \infty$. При $0 < \alpha \leq 1$ из соответствующих результатов И. И. Привалова и А. Зигмунда о свойствах сопряженных функций (см., например,

* Через a_k обозначаются вполне определенные постоянные, не зависящие от n .

(⁶, ⁷) вытекает ограниченность оператора I в пространстве H_{∞}^{α} . Следуя этим результатам и используя приведенную выше теорему С. М. Никольского и известные теоремы вложения H -пространств (¹⁻³), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Сингулярный оператор I является ограниченным оператором:*

а) из H_p^l в $H_{p_1}^{l_1}$ при $1 < p < p_1 \leq \infty$, $0 < l_1 = l - (1/p - 1/p_1) < 1$;

б) из H_p^l в $H_{p_1}^{l_1}$ при $1 < p_1 \leq p \leq \infty$, $0 < l_1 \leq l$, где нормы в пространствах H_p^l и $H_{p_1}^{l_1}$ вводятся по аналогии с (1).

Следствие. *Для того чтобы функция $f(x) \in H_p^{r+\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы $I(f; x) \in H_p^{r+\alpha}$, $1 < p \leq \infty$.*

Далее, пусть S_n — оператор Фурье, ставящий в соответствие каждой функции $f(x) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, n -й отрезок ее ряда Фурье по тригонометрической системе. Из соответствующих результатов А. Н. Колмогорова, С. М. Никольского, Л. Фейера и А. Зигмунда по рядам Фурье (см., например, (⁸); (⁶), стр. 115, 553; (⁷), стр. 115, 423, 588) следует

Лемма 1. *Для любых натуральных n*

$$\|S_n\|_p = \|S_n\|_{L_p \rightarrow L_p} = A_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где

$$0 < A_p = \text{const} < \infty \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty; \quad A_2 = 1;$$

$$A_p = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1) \quad \text{при} \quad p=1 \quad \text{и} \quad p=\infty.$$

Из теорем 1, 2 и леммы 1 следует

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in H_{L_p}^{r+\alpha}$, $r+\alpha \geq \beta$, $0 < \beta \leq 1$. Тогда для любых натуральных n справедливы оценки*

$$\|f - S_n f\|_{\beta; p} \leq \frac{a_3 A_p}{n^{r+\alpha-\beta}} H_p(f^{(r)}; \alpha), \quad 1 \leq p \leq \infty;$$

$$\|If - IS_n f\|_{\beta; p} \leq \frac{a_4 A_p}{n^{r+\alpha-\beta}} H_p(f^{(r)}; \alpha), \quad 1 < p \leq \infty,$$

которые на всем классе $H_p^{r+\alpha}$ неумлучшаемы в смысле порядка.

Следствие. *При любых $0 < \beta \leq 1$ и натуральных n*

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= O(A_p), \quad S_n: H_p^{\beta} \rightarrow H_p^{\beta}, \quad 1 \leq p \leq \infty; \\ \|IS_n\| &= O(A_p), \quad IS_n: H_p^{\beta} \rightarrow H_p^{\beta}, \quad 1 < p \leq \infty^*. \end{aligned}$$

Далее, пусть P_n — оператор, который каждой функции $f(x) \in C$ ставит в соответствие ее тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа $P_n f = P_n(f; x)$ степени $n = [N/2]$ по узлам **

$$x_k = 2k\pi/N, \quad k=1, \dots, N, \quad N=1, 2, \dots \quad (4)$$

Лемма 2. *Для любых $n = [N/2]$, $N=2, 3, \dots$, справедливы оценки*

$$\|P_n\|_{L_p \rightarrow L_q} = \infty, \quad 1 \leq p, q < \infty; \quad \|P_n\|_{C \rightarrow L_p} = B_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где

$$0 < B_p = \text{const} < \infty \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty; \quad B_2 = 1;$$

$$B_p = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{2}{\pi} N \right) \quad \text{при} \quad p=\infty;$$

$$B_p = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{N-2n+1} \ln n + O(1) \quad \text{при} \quad p=1.$$

* Соотношение $A: X \rightarrow Y$ означает, что A — линейный оператор из пространства X в пространство Y .

** При $N=2n$ существует (см., например, (⁷), гл. X) целое семейство полиномов, интерполирующих $f(x)$ в узлах (4). Здесь $P_n(f; x)$ означает тот полином из этого семейства, норма которого минимальна в $L_2(0, 2\pi)$.

Отметим, что при $N=2n+1$, $p=\infty$ оценка для B_p следует из соответствующих результатов С. М. Никольского ⁽⁸⁾ и В. В. Иванова ⁽⁹⁾, стр. 151).

Лемма 3. Для любых $n=[N/2]$, $N=2, 3, \dots$, справедливы оценки

$$\|IP_n\|_{L_p \rightarrow L_q} = \infty, \quad 1 < p, q < \infty; \quad \|IP_n\|_{C \rightarrow L_p} = C_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где

$$0 < C_p = \text{const} < \infty \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty; \quad C_2 = 1;$$

$$\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{2}{\pi} N \right) \leq C_p \leq \frac{4}{\pi} + \frac{N-2n}{n} + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{2}{\pi} N \right) \quad \text{при} \quad p = \infty;$$

$$C_p = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \quad \text{при} \quad p = 1.$$

Лемма 4. Если $T_n(x) \in \mathcal{H}_n^T$, то для любых $0 < \beta \leq 1$, $k=0, 1, \dots$

$$H_p(T_n^{(k)}; \beta) \leq 2^{1-\beta} n^{k+\beta} \|T_n\|_p, \quad T_n^{(0)} = T_n, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad n=0, 1, \dots$$

Следствие. Если $0 < \beta \leq 1$, то для $n=1, 2, \dots$

$$\|S_n\| \leq \alpha_n A_p, \quad \|P_n\| \leq \alpha_n B_p, \quad \|IP_n\| \leq \alpha_n C_p, \quad \alpha_n = 1 + 2^{1-\beta} n^\beta,$$

где $S_n: L_L \rightarrow H_p^\beta$, $P_n: C \rightarrow H_p^\beta$, $IP_n: C \rightarrow H_p^\beta$, $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема 4. Пусть $f(x) \in H_\infty^{r+\alpha}$. Тогда при $r+\alpha \geq k+\beta$, $0 \leq \beta \leq 1$, $k=0, 1, \dots, r$ для любых $n=[N/2]$, $N=2, 3, \dots$, справедливы оценки

$$\|f^{(k)} - (P_n f)^{(k)}\|_{\beta; p} \leq a_5 B_p N^{-r-\alpha+k+\beta} H(f^{(r)}; \alpha), \quad 1 \leq p \leq \infty;$$

$$\|(If)^{(k)} - (IP_n f)^{(k)}\|_{\beta; p} \leq a_6 C_p N^{-r-\alpha+k+\beta} H(f^{(r)}; \alpha), \quad 1 < p \leq \infty,$$

которые на всем классе $H_\infty^{r+\alpha}$ неулучшаемы в смысле порядка.

Следствие. Для любых натуральных $n=[N/2]$, $N=2, 3, \dots$,

$$\|P_n\| = O(B_p), \quad \|IP_n\| = O(C_p), \quad P_n, \quad IP_n: H_\infty^\beta \rightarrow H_p^\beta,$$

$$1 \leq p \leq \infty, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Заметим, что из теоремы 4 и лемм 2-4 при $k=0$, $\beta=0$, $p=\infty$ получаем оценки, из которых в свою очередь, следуют соответствующие результаты работ ^(4, 9-12) по квадратурным формулам для интегралов вида (3).

В заключение рассмотрим краевую задачу для сингулярного интегро-дифференциального уравнения ⁽⁵⁾:

$$\sum_{k=0}^m \left\{ a_k(x) \varphi^{(k)}(x) + \frac{b_k(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{t-x}{2} \varphi^{(k)}(t) dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_k(x, t) \varphi^{(k)}(t) dt \right\} = f(x); \quad (5)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(2\pi), \quad k=0, 1, \dots, m-1, \quad (6)$$

где $a_m, b_m \in H_p^\alpha$; $f, a_k, b_k \in H_p^\alpha$, $k=0, 1, \dots, m-1$; $h_k \in H_p^\alpha$, $k=0, 1, \dots, m$, — заданные 2π -периодические функции, $\varphi(x)$ — искомая функция, а сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения.

Пусть далее всюду $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, причем $p \neq \infty$ при $\beta=0$, а $\beta \neq 0$ при $p=\infty$. Обозначим через $F = H_p^\beta$ и $\Phi = H_p^{m-\beta}$ банаховы пространства с нормами соответственно

$$\|f\|_{\beta; p} = \|f\|_p + \frac{\beta}{q} H_p(f; \beta), \quad \|\varphi\|_{m+\beta; p} = \sum_{k=0}^m \|\varphi^{(k)}\|_{\beta; p}.$$

Тогда в силу теоремы 2 задача (5), (6) эквивалентна операторному уравнению $K\varphi=f$, $\varphi\in\Phi$, $f\in F$, где $K: \Phi\rightarrow F$. Приближенное решение последнего уравнения ищем в виде полинома $\varphi_n=\varphi_n(x)$, который определяем как решение уравнения

$$Q_n K \varphi_n = f_n, \quad \varphi_n \in \mathcal{H}_n^T \subset \Phi, \quad f_n = Q_n f \in \mathcal{H}_n^T \subset F, \quad n=1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $Q_n=S_n$ для метода моментов и $Q_n=P_n$ для метода коллокации (при дополнительном условии $f, a_k, b_k, h_k \in H_\infty^\alpha$, $k=0, 1, \dots, m$, $0 < \alpha \leq 1$). С помощью теорем 1–4, лемм 1–4 и результатов работ (¹⁰, ¹¹, ¹³) доказывается

Теорема 5. Пусть при $a_m^2(s) + b_m^2(s) \neq 0$, $\text{ind}(a_m + ib_m) = 0$ задача (5), (6) разрешима в Φ при любой правой части $f \in F$.

Тогда для всех n , начиная с некоторого, уравнение (7) разрешимо также при любой правой части $f_n \in \mathcal{H}_n^T$ и его нормальное решение φ_n^0 сходится к нормальному решению φ^0 задачи (5), (6) по норме пространства Φ . Если кроме того $\varphi^0 \in H_\infty^{m+l}$, то

$$\|\varphi^0 - \varphi_n^0\|_{m+\beta; p} = O(D_p n^{-l+\beta}), \quad l > \beta, \quad 1 < p \leq \infty, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (8)$$

где $D_p = \{A_p^{-2}$ при $Q_n = S_n$; $B_p + C_p$ при $Q_n = P_n\}$.

Следствие. Если $h_k \in H_\infty^l$, $l > \beta$, $k=0, \dots, m$, то в условиях теоремы 5 квадратурно-интерполяционный метод (¹⁴) решения задачи (5), (6) сходится в пространстве Φ со скоростью (8).

Отметим, что теорема 5 содержит в себе как следствия многие из ранее известных результатов по проекционным методам решения сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений (см., например, (⁹⁻¹¹, ¹⁴, ¹⁵)).

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
20 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 38, 244 (1951). ² С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.
³ В. А. Андриенко, Итоги науки, сер. Матем. анализ, 1970, М., 1971, стр. 203. ⁴ Б. Г. Габдуллаев, В сб. Тр. Междунари. конф. по конструктивной теории функций, Варна, 19–25 мая 1970 г., София, 1972, стр. 35. ⁵ Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. ⁶ Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961. ⁷ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, 2, М., 1965. ⁸ С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, № 6, 509 (1940). ⁹ В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968. ¹⁰ Б. Г. Габдуллаев, ДАН, т. 179, № 3 (1968). ¹¹ Б. Г. Габдуллаев, ДАН, т. 179, № 2 (1968). ¹² D. Gaier, Konstruktive Methoden in konformen Abbildung, Berlin – Göttingen – Heidelberg, Springer, 1964. ¹³ Б. Г. Габдуллаев, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 6 (109), 15 (1971). ¹⁴ Б. Г. Габдуллаев, Там же, № 11 (114), 33 (1971); № 4 (119), 32 (1972). ¹⁵ В. А. Золотаревский, Автореф. канд. дисс., Кишинев, 1974.