

Академик АН АрмССР М. М. ДЖРБАШЯН, Р. А. БАГИЯН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ И МЕРАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ФУНКЦИЯМИ ТИПА МИТТАГ- ЛЕФФЛЕРА

Класс целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \quad 0 < \rho < \infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (1)$$

порядка ρ и типа 1, их замечательные асимптотические свойства послужили основой в построении гармонического анализа в собственной комплексной области, теории представлений целых и аналитических функций конечного роста ⁽¹⁾ и лишь недавно в некоторых других задачах анализа ^(2, 3).

В настоящей заметке приводятся ряд новых результатов о свойствах и представлениях этих функций, в частности, даются явные выражения для конечных на полуоси $[0, +\infty)$ мер, служивших функциями распределения характеристических функций типа $E_\rho(-x; \mu)$.

1°. Для любого ε , $0 < \varepsilon < +\infty$, и β , $0 < \beta < \pi$, обозначим через $\gamma(\varepsilon; \beta)$ бесконечный контур в разрезанной вдоль луча $(-\infty; 0]$ плоскости ζ , пробегаемый в направлении неубывания $\arg \zeta$ и состоящий из лучей

$$L^{(\pm)}(\varepsilon; \beta) = \{\zeta; \arg \zeta = \pm\beta; \varepsilon \leq |\zeta| < +\infty\}$$

и дуги окружности

$$l(\varepsilon; \beta) = \{\zeta; |\arg \zeta| \leq \beta; |\zeta| = \varepsilon\},$$

соединяющей их концы $\varepsilon e^{\pm i\beta}$.

В предположении, что

$$1 < \rho < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (2)$$

положив $\beta \in (\pi/2\rho, \pi/\rho]$, введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} e^{s\rho} - s\zeta \zeta^{\rho(1-\mu)} d\zeta \quad (3)$$

от комплексной переменной $s = \tau + it$.

Важнейшие свойства функции $\Phi_{\rho, \mu}(s)$, лежащей в основе наших результатов, содержатся в следующих леммах.

Лемма 1. а) функция $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ целая и разлагается в ряд вида

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1-\mu + \frac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - r\right) s^k; \quad |s| < \infty; \quad (4)$$

б) порядок λ и тип σ функции $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ определяются из соотношений

$$\lambda = \frac{\rho}{\rho-1}, \quad \sigma = (1-\rho^{-1})^{-1/(\rho-1)}. \quad (5)$$

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\log |\Phi_{\rho, \mu}(\tau)|}{\tau^\lambda} \leq -\sigma \cos \frac{\pi}{2\lambda} < -\frac{\sigma}{\lambda}. \quad (6)$$

2°. В работе (2) установлено, что если $1 \leq \rho < +\infty$, то для любой убывающей последовательности $\{x_j\}_{j=0}^\infty$, $x_j \geq 0$, система функций $\{\mathcal{E}_n^{(\rho)}(\lambda)\}_{n=0}^\infty$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^{(\rho)}(\lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_n(\lambda; x_0, x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \frac{e^{\lambda \zeta} \zeta^{\rho-1}}{\prod_{j=0}^n (\zeta + x_j)} d\zeta, \quad n=0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

обладает свойством

$$\mathcal{E}_n^{(\rho)}(\lambda) > 0, \quad 0 < \lambda < +\infty, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

На основании этого свойства системы (7) устанавливается

Теорема 1. Пусть

$$1 \leq \rho < +\infty, \quad 1/\rho \leq \mu < +\infty. \quad (8)$$

Тогда существует конечное на полуоси $[0, +\infty)$ распределение $\Psi_{\rho, \mu}(\tau)$ такое, что

$$E_\rho(-x; \mu) = \int_0^{+\infty} e^{-x\tau} d\Psi_{\rho, \mu}(\tau), \quad x \in [0, +\infty). \quad (9)$$

Иными словами, при условии (8) функция $E_\rho(-x; \mu)$ вполне монотонна на $[0, +\infty)$, т. е.

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \{E_\rho(-x; \mu)\} \geq 0, \quad x \in [0, +\infty); \quad n=0, 1, \dots \quad (10)$$

Отметим, что представление (9), очевидно, сохраняет силу не только на полуоси $0 \leq x < +\infty$, но и во всей правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Но, пользуясь известной теоремой Винера — Пэли, о представлении класса H_2 функций в полуплоскости (см., например, (1), стр. 444), на основании лемм 1, 2 и теоремы 1 устанавливается следующая более общая

Теорема 2. а) пусть

$$1 < \rho < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (11)$$

тогда во всей конечной плоскости z

$$E_\rho(z, \mu) = \int_0^{+\infty} e^{z\tau} \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau, \quad |z| < \infty; \quad (12)$$

б) при условии

$$1 < \rho < +\infty, \quad 1/\rho \leq \mu < +\infty \quad (8')$$

мера $\Psi_{\rho, \mu}(\tau)$ теоремы 1 абсолютно непрерывна, причем

$$\Psi_{\rho, \mu}(\tau) \equiv \Phi_{\rho, \mu}(\tau), \quad 0 \leq \tau < +\infty. \quad (13)$$

В связи с теоремой 1 и утверждением б) теоремы 2 отметим следующее: в заметках Г. Полларда (4, 5) была установлена возможность представления вида (9) лишь для функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(-x; 1)$, а также тождество $\Psi_{\rho, 1}'(\tau) \equiv \Phi_{\rho, 1}(\tau)$. Но метод, которым он пользовался при получении своего результата, принципиально неприменим для функций типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(-x; \mu)$, $\mu \neq 1$.

3°. Существенно опираясь на лемму 2 и на интегральное представление (3) функции $\Phi_{\rho, \mu}(s)$, доказывается

Теорема 3. Пусть параметры ρ и μ удовлетворяют условию (11) теоремы 2.

Тогда справедлива формула

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(\mu+z/\rho)} = \int_0^{\infty} \tau^z \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} z > -1. \quad (14)$$

Из теорем 2 и 3 вытекают

Следствие 1. Если

$$1 < \rho < +\infty, \quad -\infty < \mu < 1/\rho,$$

то функция $E_{\rho}(-x; \mu)$ заведомо не будет вполне монотонной.

Иначе говоря, теорему 1 о вполне монотонности функции $E_{\rho}(-x; \mu)$ усилить нельзя.

Следствие 2. При условии (11) проблема моментов

$$\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+n/\rho)} = \int_0^{\infty} \tau^n \omega(\tau) d\tau, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

имеет единственное решение $\omega(\tau) \equiv \Phi_{\rho, \mu}(\tau)$ в классе $L(0, +\infty)$, причем если параметры ρ и μ удовлетворяют условию (8'), то

$$\omega(\tau) \geq 0, \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Следствие 3. При условии (8')

$$1 \leq \rho < +\infty, \quad 1/\rho \leq \mu < +\infty$$

$$\max_{\operatorname{Re} z \geq 0} |E_{\rho}^{(n)}(-z; \mu)| \leq \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu+n/\rho)}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

4°. На основании асимптотических свойств функций типа $E_{\rho}(z; \mu)$ при любом ρ , $0 < \rho < +\infty$, и μ , $-\infty < \mu < +\infty$ (см. (1), леммы 3.4 и 3.6), пользуясь также теоремами 2 и 3, устанавливается, наконец, следующая значительно более общая

Теорема 4. Пусть параметры ρ_1 , ρ_2 и μ_1 , μ_2 удовлетворяют условиям

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty, \quad (17)$$

$$0 < \mu_1 < +\infty, \quad -\infty < \mu_2 < +\infty.$$

Тогда на всей плоскости z

$$E_{\rho_2}(z; \mu_2) = \int_0^{+\infty} E_{\rho_1}(z\tau^{1/\rho_1}; \mu_1) \tau^{\mu_1-1} \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau \quad |z| < \infty \quad (18)$$

где

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1, \quad \mu = \mu_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 - \mu_1) \quad (19)$$

При дополнительном условии

$$\mu_2 \geq \frac{\rho_1}{\rho_2} \mu_1 \quad (20)$$

будем иметь

$$\Phi_{\rho, \mu}(\tau) \geq 0, \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

По поводу теорем 3 и 4 отметим, что в работах А. Уинтнера ^(6, 7) существенно иным методом было установлено лишь существование некоторых конечных на $[0, +\infty)$ мер $\Psi_\rho(\tau)$ и $\Psi_{\rho_1, \rho_2}(\tau)$ таких, что

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1+z/\rho)} = \int_0^\infty \tau^z d\Psi_\rho(\tau), \quad \operatorname{Re} z > -1,$$

и

$$E_{\rho_2}(z; 1) = \int_0^{+\infty} E_{\rho_1}(z\tau; 1) d\Psi_{\rho_1, \rho_2}(\tau), \quad |z| < \infty.$$

Но при $\mu_1 = \mu_2 = 1$ условия теорем 2 и 3 автоматически выполняются, и поэтому мы можем утверждать значительно большее об этих мерах: эти меры абсолютно непрерывны, причем

$$\Psi'_\rho(\tau) = \Phi_{\rho, 1}(\tau) \geq 0, \quad \Psi'_{\rho_1, \rho_2}(\tau) = \rho_1 \Phi_{\rho, 1}(\tau^{\rho_1}) \tau^{\rho_1 - 1}, \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Институт математики
Академии наук АрмССР
Ереван

Поступило
20 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966. ² М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 39, № 1, 69 (1975). ³ М. М. Джрбашян, ДАН, т. 219, № 6, 1302 (1974). ⁴ H. Pollard, Bull. Am. Math. Soc., v. 52, 908 (1946). ⁵ H. Pollard, ibid., v. 54, 1115 (1948). ⁶ A. Wintner, J. Math. pures et appl., 165 (1959). ⁷ A. Wintner, Am. J. Math. v. 80, N 1, 111 (1958).