

Г. Ш. РУБИНШТЕЙН

О ПЕРЕМЕШИВАНИЯХ МАССЫ НА КОМПАКТЕ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 3 III 1975)

В классе всех перемещений массы на произвольном (метризуемом) компакте выделяются так называемые перемешивания, при реализации которых количество массы на каждом борелевском множестве не изменяется. Доказывается, что определяемое каждым таким перемешиванием бинарное отношение предельной связи точек компакта является симметричным. Этот результат дополняется примером нетривиального перемешивания, при котором отношение конечной связи антирефлексивно и антисимметрично, т. е. бинарное отношение непосредственной связи не содержит конечных циклов.

1. Рассмотрим произвольный (метризуемый) компакт Q и σ -алгебру B_Q его борелевских множеств. Перемещения массы на Q задаются (см. ⁽¹⁻⁴⁾) конечными неотрицательными σ -аддитивными по каждому аргументу функциями $\psi: B_Q \times B_Q \rightarrow R_+$ со значениями $\psi(e, e')$, указывающими, какое количество рассматриваемой однородной массы перемещается с каждого множества $e \in B_Q$ на каждое множество $e' \in B_Q$. В частности, перемещение единицы массы из точки $x_0 \in Q$ в точку $y_0 \in Q$ характеризуется функцией ψ_{x_0, y_0} , принимающей значение 1, если $x_0 \in e$ и $y_0 \in e'$, и значение 0 в противном случае. А любое перемещение с конечным носителем является положительной комбинацией указанных простейших перемещений. Особо выделим элементарные k -циклические перемещения

$$\pi_{x_1 x_2 \dots x_k} = \psi_{x_1 x_2} + \psi_{x_2 x_1} + \dots + \psi_{x_{k-1} x_k} + \psi_{x_k x_1}, \quad (1)$$

отвечающие всевозможным $k \geq 1$ попарно различным точкам из Q .

В случае произвольного перемещения ψ будем говорить, что точка $x \in Q$ непосредственно связана с точкой $y \in Q$, и обозначать это символом $x \uparrow y$, если упорядоченная пара (x, y) принадлежит носителю $N(\psi)$ соответствующей функции ψ , т. е. для любых окрестностей $e_x \in B_Q$ и $e_y \in B_Q$ точек x и y имеет место неравенство $\psi(e_x, e_y) > 0$. Из этого определения следует, что при $\psi(e, e') > 0$ всегда найдется точка $x \in e$, непосредственно связанная с некоторой точкой $y \in e'$. Если при перемещении ψ для некоторых $k \geq 1$ точек $x_1, x_2, \dots, x_k$ из Q справедливы соотношения $x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_k \uparrow x_1$, то говорят, что это перемещение содержит конечный цикл.

Следующие два бинарных отношения на Q являются транзитивным и непрерывным транзитивным расширением введенного непрерывного бинарного отношения непосредственной связи. Говорят, что при перемещении ψ имеется конечная связь точки $x \in Q$ с точкой $y \in Q$, и обозначают это символом $x \uparrow\uparrow y$, если найдутся такие точки $x_1, x_2, \dots, x_k$ из Q , что $x = x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_k = y$. Если же для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k = k(\varepsilon)$ пар $x_s \uparrow y_s$ таких, что

$$r(x, x_1) + \sum_{s=1}^{k-1} r(y_s, x_{s+1}) + r(y_k, y) < \varepsilon, \quad (2)$$

где r — некоторая фиксированная непрерывная метрика на Q , то говорят, что при перемещении ψ имеется предельная связь точки $x \in Q$ с точкой $y \in Q$. В последнем определении, очевидно, требование $x_s \uparrow y_s$ можно заменить более слабым $x_s \uparrow y_s$.

При реализации каждого перемещения ψ изменение распределения массы на Q характеризуется σ -аддитивной функцией

$$\varphi_{\psi}(e) = \psi(Q, e) - \psi(e, Q), \quad e \in B_Q. \quad (3)$$

Интересующий нас класс Π_Q перемешиваний массы на Q состоит из перемещений π , для которых $\varphi_{\pi}(e) = 0$ при всех $e \in B_Q$.

Простейшими перемешиваниями являются выделенные выше элементарные k -циклические перемещения (1). При этом, как нетрудно проверить, если $\pi \in \Pi_Q$ имеет конечный носитель, то оно представимо в виде положительной комбинации некоторых элементарных k_v -циклических перемещений. Это означает, в частности, что порождаемые указанными перемешиваниями бинарные отношения $\uparrow$ конечной связи являются симметричными. Соответствующая характеристика введенных бинарных отношений для общего случая содержится в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Порождаемое любым $\pi \in \Pi_Q$ бинарное отношение предельной связи является симметричным.*

Теорема 2. *Если компакт Q содержит подмножество Q' , гомеоморфное канторову совершенному множеству, то найдется $\pi \in \Pi_Q$, при котором каждая точка $x \in Q'$ непосредственно связана с некоторой точкой $y \in Q'$, но на Q не существует ни одного конечного цикла, т. е. бинарное отношение конечной связи антирефлексивно и антисимметрично.*

2. Доказательству теоремы 1 предположим две леммы.

Лемма 1. *Пусть $\pi \in \Pi_Q$ имеет конечный носитель, т. е.*

$$\pi = \sum_{i=1}^m c_i \psi_{x_i y_i} = \sum_{v=1}^n d_v \pi_{x_1^v x_2^v \dots x_{k_v}^v}, \quad (4)$$

где $c_i > 0$, $d_v > 0$ и среди $x_1^v, x_2^v, \dots, x_{k_v}^v$ ни при каком $v = 1, \dots, n$ нет совпадающих.

Тогда каждое $N_i = \{v: (x_i, y_i) \in N(\pi_{x_1^v x_2^v \dots x_{k_v}^v})\}$ содержит по крайней мере одно v такое, что $c_i^{-1} \pi(Q, Q) \geq k_v$.

Доказательство. Из (4) и определения множеств N_i вытекает, что

$$\pi(Q, Q) = \sum_{i=1}^m c_i = \sum_{v=1}^n d_v k_v, \quad c_i = \sum_{v \in N_i} d_v$$

и, следовательно,

$$\pi(Q, Q) = \sum_{v=1}^n d_v k_v \geq \sum_{v \in N_i} d_v k_v \geq c_i \min_{v \in N_i} k$$

откуда получаем существование требуемого v .

З а м е ч а н и е. Каково бы ни было конечное разбиение $\{e_i\}_{i=1}^m$ компакта Q на попарно непересекающиеся борелевские множества, каждое $\pi \in \Pi_Q$ индуцирует на $J = \{1, 2, \dots, m\}$ некоторое перемешивание $\tilde{\pi}$, при котором $\tilde{\pi}(\tilde{e}, \tilde{e}') = \pi(\bigcup_{i \in \tilde{e}} e_i, \bigcup_{i \in \tilde{e}'} e_i)$ для любых подмножеств $\tilde{e}$ и $\tilde{e}'$ множества J . Если при

этом $\pi(e_{i_0}, e_{j_0}) = c > 0$, то на основании леммы 1 в J найдется $k \leq c^{-1} \pi(Q, Q)$ таких элементов $i_1, i_2, \dots, i_k$, что $i_1 = j_0$, $i_k = i_0$ и $\tilde{\pi}(\{i_s\}, \{i_{s+1}\}) = \pi(e_{i_s}, e_{i_{s+1}}) > 0$. Но тогда при любом $s = 1, \dots, k-1$ найдутся такие $x_s \in e_{i_s}$ и $y_s \in e_{i_{s+1}}$, что $x_s \uparrow y_s$.

Лемма 2. *Если при $\pi \in \Pi_Q$ точка $x \in Q$ непосредственно связана с отличной от нее точкой $y \in Q$, то для любых непересекающихся замкнутых окрестностей e_x и e_y этих точек найдутся такие $x' \in e_x$ и $y' \in e_y$, что $y' \uparrow x'$.*

Доказательство. Так как $x \uparrow y$, то $\pi(e_x, e_y) = c > 0$. Рассмотрим такую последовательность разбиений $\{e_i^v\}_{i=1}^{m_v}$ компакта Q , что $e_1^v = e_x$, $e_2^v = e_y$, $\text{diam } e_i^v < v^{-1}$, $i = 3, \dots, m_v$, $v = 1, 2, \dots$. На основании замечания к лемме 1

можно утверждать, что для каждого из этих разбиений найдется $k_v \leq c^{-1} \pi(Q, Q)$ таких пар $x_s^v \uparrow y_s^v$, что

$$x_1^v \in e_v, \quad y_k^v \in e_x, \quad r(y_s^v, x_{s+1}^v) < v^{-1}, \quad s=1, \dots, k_v-1, \quad v=1, 2, \dots$$

Выберем подпоследовательность v_j так, чтобы все k_{v_j} были равны одному и тому же k и при этом подпоследовательности $x_s^{v_j}$ и $y_s^{v_j}$ сходились к некоторым x_s и y_s . Эти предельные точки, очевидно, удовлетворяют соотношениям $x_1 \in e_v, y_k \in e_x, x_1 \uparrow y_1 = x_2 \uparrow y_2 = \dots = x_k \uparrow y_k$. Следовательно, в качестве искомого могут быть приняты точки $x' = y_k$ и $y' = x_1$.

Доказательство теоремы 1. Пусть при $\pi \in \Pi_Q$ точка $x \in Q$ предельно связана с точкой $y \in Q$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k = k(\varepsilon)$ пар $x_s \uparrow y_s$, удовлетворяющих условию (2). Но тогда в силу леммы 2 найдутся такие пары $y_s' \uparrow x_s'$, что

$$r(y_s, y_s') < k^{-1} \varepsilon, \quad r(x_s, x_s') < k^{-1} \varepsilon, \quad s=1, \dots, k,$$

следовательно,

$$r(y, y_k') + \sum_{s=2}^k r(x_s', y_{s-1}') + r(x_1', x) < 3\varepsilon.$$

Так как при этом $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым, то при рассматриваемом $\pi \in \Pi_Q$ точка y предельно связана с точкой x , что и требовалось показать.

В заключение этого пункта приведем простое следствие доказанной теоремы, которое нам потребовалось при исследовании одной конкретной задачи, но установить его непосредственно не удавалось.

Пусть на компакте Q задано непрерывное отношение порядка, определяемое замкнутым множеством $M \subset Q \times Q$. С его помощью в классе $\Phi^+(B_Q)$ всех неотрицательных σ -аддитивных функций $\varphi: B_Q \rightarrow R_+$ вводится следующее отношение предпорядка: $\varphi_1 \succcurlyeq \varphi_2$, если найдется перемещение ψ с носителем $N(\psi) \subset M$, для которого определяемая по формуле (3) σ -аддитивная функция φ_ψ совпадает с $\varphi_2 - \varphi_1$. Требуется показать, что введенный предпорядок в действительности является отношением порядка.

Из теоремы 1 и предположений относительно M вытекает, что если носитель $N(\pi)$ некоторого $\pi \in \Pi_Q$ содержится в M , то при этом перемешивании каждая точка $x \in Q$ может быть предельно и тем более непосредственно связана только сама с собой, т. е. $N(\pi)$ содержится в диагональном множестве $D = \{(x, x)\}_{x \in Q}$.

Предположим теперь, что для некоторых φ_1 и φ_2 из $\Phi^+(B_Q)$ справедливы соотношения $\varphi_1 \succcurlyeq \varphi_2$ и $\varphi_2 \succcurlyeq \varphi_1$. Тогда найдутся такие перемещения ψ_1 и ψ_2 , что $N(\psi_1) \cup N(\psi_2) \subset M$ и $\varphi_{\psi_1} + \varphi_{\psi_2} = (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, т. е. $\pi = \psi_1 + \psi_2$ является перемешиванием с носителем из M . Но тогда, как отмечалось, $N(\psi_1) \cup N(\psi_2) = N(\pi) \subset D$ и, следовательно, $\varphi_{\psi_1} = \varphi_{\psi_2} = 0$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$, что и требовалось показать.

3. Для доказательства теоремы 2, очевидно, достаточно привести соответствующий пример для случая, когда компакт Q совпадает с канторовым совершенным множеством, т. е. состоит из вещественных чисел $a = 2 \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} a_i$, где $a_i \in \{0, 1\}$. Сопоставим каждой такой троичной дроби двоичную дробь $\sigma(a) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} a$ и лебегову меру μ с $B_{[0, 1]}$ перенесем на B_Q , полагая $\bar{\mu}(e) = \mu(\sigma(e))$, $e \in B_Q$.

Предположим теперь, что найдется гомеоморфизм f компакта Q на себя, при котором

$$\bar{\mu}(f(e)) = \bar{\mu}(e), \quad e \in B_Q, \quad f^v(a) \neq a, \quad a \in Q, \quad v=1, 2, \dots \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что тогда в качестве искомого можно будет принять перемешивание $\pi(e, e') = \bar{\mu}(f(e) \cap e') = \bar{\mu}(e \cap f^{-1}(e'))$, носитель которого совпадает с множеством пар $(a, f(a))$, $a \in Q$.

Таким образом, для получения интересующего нас примера достаточно построить гомеоморфизм указанного типа. Можно показать, что таковым является

$$f: a = 2 \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} a_i \mapsto a' = 2 \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} a'_i,$$

где $a'_i = 1 - a_i$, если $a_j = 1$ для всех $j < i$, и $a'_i = a_i$ в противном случае. Проверка требования (5) базируется на двух замечаниях.

З а м е ч а н и е 1. При любом $a \in Q$ множество $\{f^v(a)\}_{v=0, \pm 1, \dots}$ совпадает с множеством тех $a' \in Q$, для которых $a - a'$ является трично-рациональным числом, причем $f^v(a) = f^{v'}(a)$ лишь при $v = v'$. В частности, f^v -образами точки $a^* = 2 \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i}$ при $v > 0$ являются $a \in Q$ с конечным числом $a_i = 1$, а при $v \leq 0$ — с конечным числом $a_i = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Полагая $a^{(1)} = 0$, $a^{(k)} = 2 \sum_{i=1}^{k-1} 3^{-i}$, $k = 2, 3, \dots$, представим рассматриваемый компакт в виде

$$Q = \{a^*\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right), \quad Q_k = Q \cap [a^{(k)}, a^{(k)} + 3^{-k}].$$

При этом

$$\sigma(a^*) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}, \quad \sigma(Q_k) = [1 - 2^{-k+1}, 1 - 2^{-k}]$$

и f -образы точек $a \in Q_k$ удовлетворяют соотношениям

$$f(a) = a + 5 \cdot 3^{-k} - 1, \quad \sigma(f(a)) = \sigma(a) + 3 \cdot 2^{-k} - 1.$$

Другими словами, построенный гомеоморфизм состоит в сдвиге точки a^* на -1 , а каждого множества Q_k на $5 \cdot 3^{-k} - 1$. Что касается отрезков $\sigma(Q_k)$, то они сдвигаются при этом на $3 \cdot 2^{-k} - 1$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. В. Канторович, ДАН, т. 37, № 7—8, 227 (1942). ² Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, ДАН, т. 115, № 6, 1058 (1957). ³ Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, Вестн. ЛГУ, № 7, 52 (1958). ⁴ Г. Ш. Рубинштейн, УМН, т. 25, № 5 (155), 171 (1970).