

О. С. РЫЖОВ

О ЗАВИСИМОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕЛ ОТ ЧИСЛА МАХА НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА В ТРАНСЗВУКОВОМ ДИАПАЗОНЕ СКОРОСТЕЙ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 4 III 1975)

Будем считать, что в рассматриваемой области поток мало отличается от равномерного, скорость которого равна критической. В качестве исходного возьмем уравнение Кармана (¹)

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\nu-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad (1)$$

здесь x, r — оси декартовой или цилиндрической системы координат; φ — потенциал возмущений; параметр ν принимает значение 1 для плоскопараллельных течений и 2 для течений с осевой симметрией.

Проведя вне обтекаемого тела замкнутый контур C и умножив уравнение (1) на $\partial \varphi / \partial x$, запишем его в интегральной форме

$$\oint_C \left\{ r^{\nu-1} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] dr + r^{\nu-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dx \right\} = 0, \quad (2)$$

которая выражает закон сохранения продольной составляющей импульса движущегося газа.

Рассмотрим поле скоростей в некоторой промежуточной области (^{2, 3}), где основной вклад во вносимые телом возмущения можно определить, положив скорость частиц на бесконечности равной критической. Поправку, обусловленную тем, что число Маха $M_\infty \neq 1$, будем считать пропорциональной малому параметру ε . Итак,

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\varphi}(x, r) + \varepsilon \varphi'(x, r), \quad \bar{\varphi} = r^{\omega_0} f_{\omega_0}(\xi), \\ \varphi' &= r^{\omega_1} \chi_{\omega_1}(\xi) + \varepsilon r^{\omega_2} \chi_{\omega_2}(\xi) + \dots, \quad \xi = x/r^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Функция f_{ω_0} задает асимптотический закон затухания возмущений вдали от тела, обтекаемого звуковым потоком. Для плоскопараллельных течений ее вид установлен в (^{4, 5}), для течений с осевой симметрией — в (⁶⁻⁸). Из результатов этих работ следует, что при $M_\infty = 1$ от тела до бесконечности простирается ударная волна $\xi = \xi_s = \text{const}$.

Соответствующую разложению (3) ударную волну зададим равенством

$$\xi = \xi_s (1 + \varepsilon r^{-\omega_1} \xi'), \quad \xi' = \sigma_{\omega_1} r^{\omega_1} + \varepsilon \sigma_{\omega_2} r^{\omega_2} + \dots$$

Вверх по потоку от ее фронта добавочный потенциал φ' примем равным нулю (^{2, 3}). Припишем индекс 2 параметрам газа в точках, лежащих за линией ударной волны. Тогда первый из входящих в φ' членов будет удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \chi_{\omega_{1,2}} &= 2\sigma_{\omega_1} \xi_s \left(n^2 \xi_s^2 - \frac{df_{\omega_{0,2}}}{d\xi} \right) \\ \frac{d\chi_{\omega_{1,2}}}{d\xi} &= 2\sigma_{\omega_1} \xi_s^2 n(n + 2\omega_1 + \nu - 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Расположим контур C позади обтекаемого тела и составим его из отрезков прямых $r=r_1=0$, $x=x_2$, $r=r_2$ и $x=x_1$. Очевидно, $x_2 > x_1 > 0$. Подставим разложение (3) в соотношение (2). Чтобы оперировать со сходящимися интегралами, будем рассматривать вначале симметричные части как основного, так и поправочного потенциалов; тогда $\partial\bar{\phi}/\partial r = \partial\phi'/\partial r = 0$ при $r=0$.

Приравняв нулю в полученном интегральном уравнении главные члены, после несложных преобразований приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для функции f_{ω_0} . Для плоскопараллельных течений $n=4/5$, $\omega_0=2/5$. В параметрическом виде имеем в области позади ударной волны ⁽⁵⁾

$$\xi = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \right)^{2/5} b^{1/5} \frac{8\xi + 3}{\xi^{2/5}}, \quad f_{2/5} = \frac{1}{27} \left(\frac{3}{4} \right)^{1/5} b^{3/5} \frac{16\xi^2 + 18\xi + 27}{\xi^{1/5}}, \quad (5)$$

$$b = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^{-5} \cdot 11^{-2} (122 + 9\sqrt{3}), \quad \xi_s = 8^{-1} (5\sqrt{3} - 8).$$

Течениям с осевой симметрией отвечают значения $n=4/7$, $\omega_0=-2/7$. Параметрическое представление функции $f_{-2/7}$ в области за ударным фронтом гласит ⁽⁸⁾

$$\xi = \frac{1}{7} b^{3/7} \frac{12\xi + 5}{\xi^{2/7}}, \quad f_{-2/7} = \frac{32}{343} b^{2/7} \xi^{1/7} (12\xi^2 + 15\xi - 25), \quad (6)$$

$$b = (2 - \sqrt{3})^{1/3}, \quad \xi_s = 12^{-1} (7\sqrt{3} - 12).$$

Дальнейший анализ существенно упрощается, если использовать формулы (5) и (6) для функции f_{ω_0} .

Обратимся к плоскопараллельным течениям. В этом случае в разложении для поправочного потенциала ϕ' можно ограничиться лишь первым членом. Поскольку искомое решение должно соответствовать изменению сопротивления тела по сравнению с тем, которое оно испытывает при $M_\infty=1$, необходимо потребовать, чтобы в следующем из (2) интегральном соотношении член порядка ε не зависел ни от x_1 , x_2 , ни от r_2 . Отсюда находим сразу $\omega_1=3/5$. Приравняв в указанном интегральном соотношении поправочный член нулю, выводим линейное дифференциальное уравнение для функции $\chi_{3/5}$:

$$\frac{df_{3/5}}{d\xi} \left(\frac{df_{3/5}}{d\xi} - \frac{16}{25} \xi^2 \right) \frac{d\chi_{3/5}}{d\xi} + \frac{6}{25} f_{2/5} \chi_{3/5} = 0. \quad (7)$$

Фактически оно является первым интегралом того дифференциального уравнения второго порядка, которое получается для этой функции при подстановке разложения (3) непосредственно в исходное уравнение Кармана. Общий вид первого интеграла находится из соотношения (7) посредством замены нуля в его правой части на произвольную постоянную $c_{3/5}$.

Переходя к независимой переменной ξ по формулам (5), определим симметричную часть $\chi_{3/5}^s$ поправочной функции $\chi_{3/5}$. В итоге

$$\chi_{3/5}^s = c_{3/5}^s \xi^{-3/10} (1 + \xi)^{-5/6} (\xi + 3/4).$$

Теперь легко найти антисимметричную часть $\chi_{3/5}^a$ решения, которая пропорциональна постоянной $c_{3/5}$. Изберем, однако, другой путь, связанный с использованием изложенных в ⁽⁵⁾ результатов. Если продифференцировать уравнение (7) и произвести замену $\chi_{3/5} = \xi^{-3/10} h_{3/5}(\xi)$, то функция $h_{3/5}$ будет удовлетворять гипергеометрическому уравнению. Окончательно

$$\chi_{3/5}^a = c_{3/5}^a \xi^{1/5} F(2, 1/3, 3/2; -\xi). \quad (8)$$

Вычислим значения $c_{3/5}$ и $c_{3/5}^a$. Подставляя начальные данные (4) в соотношение (7) с постоянной $c_{3/5}$ в правой части, имеем

$$c_{3/5} = -2^{-3/5} \cdot 3^{7/5} \cdot (5\sqrt{3} - 8)^{-7/5} (40 - 23\sqrt{3}) b^{6/5} \sigma_{3/5}.$$

Воспользовавшись формулой (8) и устремив в этом соотношении переменную ξ к нулю, находим

$$c_{2/5}^a = -2^{-8/5} \cdot 3^{9/5} \cdot 5 (5 \sqrt[3]{3} - 8)^{-7/5} (40 - 23 \sqrt[3]{3}) b^{3/5} \sigma_{3/5}. \quad (9)$$

Анализ осесимметричных течений проводится аналогично, за исключением того, что в разложении для поправочного потенциала ϕ' вначале удерживаются два первых члена. Пусть $\omega_1 = 0$. Как функция переменной ξ , заданной формулами (6), χ_0 удовлетворяет уравнению

$$\xi(1+\xi) \frac{d^2 \chi_0}{d\xi^2} + (1 + 12/5 \xi) \frac{d\chi_0}{d\xi} = 0.$$

Постоянная c_0^a дает симметричное решение. Что касается антисимметричного решения, то его можно записать как

$$\chi_0^a = c_0^a \xi^{-7/5} F(7/5, 7/5, 12/5; -1/\xi) = 7/5 c_0^a \left[k_0 - \ln \xi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(7/5)_m}{m \cdot m!} (-\xi)^m \right];$$

здесь постоянная $k_0 = \psi(1) - \psi(2/5) - 5/2$, а ψ обозначает логарифмическую производную гамма-функции.

При отыскании второго члена поставим условие, чтобы пропорциональное ξ^2 слагаемое, которое входит в соотношение, следующее из интегрального уравнения (2) после подстановки в него разложения (3), не зависело ни от x_1 , x_2 , ни от r_2 . Это условие позволяет определить $\omega_2 = 2/7$. Привравняв нулю указанное слагаемое, имеем

$$\frac{df_{-2/7}}{d\xi} \left(\frac{df_{-2/7}}{d\xi} - 16/49 \xi^2 \right) \frac{d\chi_{2/7}}{d\xi} - 4/49 f_{-2/7} \chi_{2/7} + \left(\frac{df_{-2/7}}{d\xi} - 8/49 \xi^2 \right) \left(\frac{d\chi_0}{d\xi} \right)^2 = 0. \quad (10)$$

Последнее соотношение служит первым интегралом дифференциального уравнения второго порядка для функции $\chi_{2/7}$, к которому приводит подстановка разложения (3) в исходное уравнение Кармана. Общий вид первого интеграла устанавливается путем замены нуля в правой части соотношения (10) на произвольную постоянную $c_{2/7}$.

Переход к независимой переменной ξ дает возможность найти простое выражение для антисимметричной части $\chi_{2/7}^s$ функции $\chi_{2/7}$. Действительно,

$$\chi_{2/7}^s = c_{2/7}^s \xi^{-1/7} (1+\xi)^{-4/5} (\xi + 5/6).$$

Положив в соотношении (10) $\chi_0 = 0$, продифференцировав его и совершив замену $\chi_{2/7} = \xi^{-1/7} h_{2/7}$, легко видеть, что функция $h_{2/7}$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению. Отсюда находим ⁽⁸⁾

$$\begin{aligned} \chi_{2/7}^a &= c_{2/7}^a \xi^{-15/7} F(2, 2, 16/5; -1/\xi) = \\ &= 66/25 c_{2/7}^a \xi^{-1/7} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(-1/5)_m}{m!} (k_m - \ln \xi) (-\xi)^m \end{aligned} \quad (11)$$

с постоянной $k_m = \psi(1+m) - \psi(6/5-m) - 1/(1+m)$.

Для вычисления констант $c_{2/7}$ и $c_{2/7}^a$ необходимо написать условия для функции $\chi_{2/7}$ и ее производной $d\chi_{2/7}/d\xi$ на ударном фронте. В эти условия войдут σ_0 , $d\chi_{0,2}/d\xi$ и $d^2\chi_{0,2}/d\xi^2$. Если $\chi_0 = 0$, то эти условия задаются равенствами (4), в которых параметр ω_1 заменен на $\omega_2 = 2/7$. В этом случае

$$c_{2/7} = -2^{86/7} \cdot 3^{-2/7} \cdot 5^4 \cdot 7^{-6} \cdot (7\sqrt[3]{3} - 12)^{-9/7} (54 - 31\sqrt[3]{3}) b^{18/7} \sigma_{2/7}.$$

Воспользовавшись асимптотикой формулы (11) при $\xi \rightarrow 0$, находим далее

$$c_{2/7}^a = 2^{10/7} \cdot 3^{-9/7} \cdot 5^4 \cdot 7^{-2} \cdot 11^{-1} \cdot (7\sqrt[3]{3} - 12)^{-9/7} (54 - 31\sqrt[3]{3}) b^{9/7} \sigma_{2/7}. \quad (12)$$

Чтобы подсчитать сопротивление, надо поместить обтекаемое тело внутрь контура C . Это можно достичь, приняв $x_1 < 0$ и оставив по-прежнему $x_2 > 0$ *. Поскольку в силу равенств (9) и (12) антисимметричная часть поправочного потенциала отлична от нуля, при $v=1$ предел подынтегрального выражения в (2) будет разным в зависимости от того, с какой стороны приближаться к оси $r=0$ вдоль прямой $x=x_2$, а при $v=2$ подынтегральное выражение обращается в бесконечность. Это связано с тем простым фактом, что за обтекаемым телом простирается область вихревого следа, которая расположена вблизи полуоси $x>0$. Для аккуратного подсчета силы сопротивления эта область должна быть принята во внимание (9).

Тем не менее можно найти, как меняется сопротивление тел при изменении числа Маха набегающего потока, не вычисляя самой величины силы. Для этой цели напишем для уравнения Кармана граничное условие (1) $\partial\varphi/\partial x = K_v \tau^{-2v/(4-v)} (M_\infty - 1) = K$, которое должно выполняться в бесконечно удаленных точках; здесь постоянная K_v определяется термодинамическими свойствами движущегося газа, параметр τ равен относительной толщине тела. Из изложенного выше следует, что в разложении (3) величина $\varepsilon = \varepsilon(K) \rightarrow 0$, когда $K \rightarrow 0$. Преобразование подобия

$$x \rightarrow x/x_0, \quad r \rightarrow r^{v/(4-v)} r/x_0, \quad \varphi \rightarrow \varphi / [\tau^{2v/(4-v)} x_0] \quad (13)$$

оставляет инвариантным уравнение (1). В то же время при таком преобразовании автомодельная переменная $\xi \rightarrow \xi (x_0^3 \tau^4)^{-\delta v + 1}$, а параметр τ выпадает из выражения для K . Поскольку основной потенциал $\tilde{\varphi}$ соответствует потоку с $M_\infty = 1$ около тела заданных размеров, то при любой скорости частиц на бесконечности он должен сохраняться неизменным. Отсюда следует, что $x_0 = \tau^{-4/3}$. Подвергнем теперь сумму $\varphi = \tilde{\varphi} + \varepsilon \varphi$ преобразованию (13). Для плоскопараллельных течений коэффициент перед функцией $r^{3/2} \chi_{3/2}(\xi)$, входящей во второй член в этой сумме, станет равным $\tau^{1/2} \varepsilon$. Он не зависит от τ только при условии $\varepsilon = K^{1/2}$. Таким образом, сопротивление профиля крыла меняется пропорционально $(M_\infty - 1)^{1/2}$, что хорошо подтверждается результатами численных расчетов (2). Для тел с осевой симметрией изменение сопротивления будет порядка ε^2 , оно пропорционально первой степени $\chi_{-2/3}$ и квадрату χ_0 . Положим, как было сделано выше, $\chi_0 \equiv 0$. После преобразования подобия коэффициент перед поправочным членом $r^{3/2} \chi_{3/2}(\xi)$ в выражении для потенциала станет равным $\tau^{1/2} \varepsilon^2$. Зависимость от τ в нем исчезнет, если $\varepsilon^2 = K^{2/3}$. Отсюда следует, что сопротивление тела вращения изменяется как $(M_\infty - 1)^{2/3}$; этот вывод также находится в согласии с численными расчетами (3). Если $\chi_0 \neq 0$, то возмущенная скорость будет порядка $\varepsilon = (M_\infty - 1)^{1/3}$.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Th. von Karman, J. Math. and Phys., v. 26, № 3, 182 (1947). ² В. Н. Диесперов, Ю. Б. Лифшиц, О. С. Рыжов, Учен. зап. ЦАГИ, т. 5, № 5, 30 (1974). ³ В. Н. Диесперов, Ю. Б. Лифшиц, О. С. Рыжов, Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 49 (1974). ⁴ Ф. И. Франкль, ДАН, т. 57, № 7, 661 (1947). ⁵ D. Euvard, C. R., v. 260, № 7, 1851 (1965). ⁶ K. G. Guderley, H. Joshikara, Quart. Appl. Math., v. 8, № 4, 333 (1951). ⁷ С. В. Фалькович, И. А. Чернов, ПММ, т. 28, в. 2, 280 (1964). ⁸ D. Euvard, C. R., v. 260, № 22, 5691 (1965). ⁹ В. Н. Диесперов, Ю. Б. Лифшиц, ПММ, т. 39, в. 2, 290 (1975).

* Так как контрольный контур будет пересекать ударную волну, в уравнении (2) возникнет ошибка, обусловленная изменением энтропии на ее фронте. В дальнейших рассуждениях этой ошибкой пренебрегаем.