

С. Ф. СОПРУНОВ

НАЧАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ НЕСТАНДАРТНЫХ АРИФМЕТИК

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 III 1975)

Обозначим символом σ сигнатуру $\{+, \times, 0, 1, A\}$, где A — одноместный предикатный символ. Через P мы обозначим формальную систему аксиом Пеано, а через P_σ — систему аксиом, отличающуюся от P тем, что P_σ содержит аксиомы индукции для всех формул в сигнатуре σ .

Стандартным образом определим понятие ограниченных кванторов $\forall x \leq y$ и $\exists x \leq y$. Символом Σ_k^A мы обозначим множество формул в сигнатуре σ , кванторная приставка которых состоит только из ограниченных кванторов. Мы скажем, что формула $P(x_1, \dots, x_n)$ в сигнатуре σ принадлежит классу Σ_k^A при $k \geq 1$, если формула $P(x_1, \dots, x_n)$ получается из некоторой формулы, принадлежащей классу Σ_0^A , приписыванием кванторной приставки, содержащей не более $k-1$ перемен кванторов и начинающейся с квантора существования. Символом Σ_k при $k \geq 0$ обозначим множество формул в сигнатуре $\{+, \times, 0, 1\}$, принадлежащих классу Σ_k^A .

Стандартным образом определим сокращения $x \leq y$ и $x < y$, а именно $x \leq y$ есть сокращение для формулы $(\exists z) (x+z=y)$, а $x < y$ — сокращение для $x \leq y \& \neg (x=y)$.

Следующая лемма может быть получена методами работ ^(1, 2).

Лемма. Пусть $M_1 \models N$ и $M_2 \models N$ суть некоторые модели P_σ , пусть $a_1, \dots, a_n \in M_1$ и пусть $b_1, \dots, b_n, c \in M_2$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) Для любой формулы $F(x_1, \dots, x_m, y) \in \Sigma_1^A$ и любого набора элементов $v_1, \dots, v_m \in M_1$ существует формула $F_1(x_1, \dots, x_k, y) \in \Sigma_1^A$ и элементы $t_1, \dots, t_k \in M_2$ такие, что

$$(\forall i \in N) (M_1 \models F(v_1, \dots, v_m, i) \Leftrightarrow M_2 \models F_1(t_1, \dots, t_k, i)). \quad (*)$$

2) Для любой формулы $\neg F_1(x_1, \dots, x_k, y) \in \Sigma_1^A$ и любого набора элементов $t_1, \dots, t_k \in M_2$ существует формула $F(x_1, \dots, x_m, y) \in \Sigma_1^A$ и элементы $v_1, \dots, v_m \in M_1$ такие, что соотношение $(*)$ выполнено.

3) Для любой формулы $F(x_1, \dots, x_n, y) \in \Sigma_1^A$ имеет место

$$M_1 \models (\exists y) F(a_1, \dots, a_n, y) \rightarrow M_2 \models (\exists y < c) F(b_1, \dots, b_n, y).$$

Тогда:

1) Для любого $a \in M_1$ существует $b \in M_2$ такое, что для любой формулы $F(x_1, \dots, x_{n+1}, y) \in \Sigma_1^A$ выполняется

$$M_1 \models (\exists y) F(a_1, \dots, a_n, y) \rightarrow M_2 \models (\exists y < c) F(b_1, \dots, b_n, y).$$

2) Если $b \in M_2$ и $M_2 \models b < b_i$ для некоторого $i \leq n$, то найдется $a \in M_1$ такое, что соотношение $(**)$ выполнено для любой формулы $F(x_1, \dots, x_{n+1}, y) \in \Sigma_1^A$.

Пусть M_1 — структура ⁽³⁾ с сигнатурой $\{+, \times, 0, 1\}$. Мы скажем, что M_1 является слабой арифметикой, если M_1 является моделью P ; структура M_1 называется сильной арифметикой, если M_1 есть элементарное расширение натурального ряда N ($M_1 \models N$), т. е. любая замкнутая формула в сигнатуре $\{+, \times, 0, 1\}$, истинная на N , истинна и в структуре M_1 . Очевидно, что любая сильная арифметика является слабой. Слабая

арифметика называется нестандартной арифметикой, если она не изоморфна натуральному ряду.

Пусть M_1 — сильная нестандартная арифметика. Мы скажем, что M_1 — консервативная арифметика, если для любого формульного в M_1 отношения $R(x)$ множество $\{i \in N \mid M_1 \models R(i)\}$ является арифметическим подмножеством натурального ряда ⁽¹⁾. Аналогично ⁽²⁾ мы скажем, что M_2 является k -элементарной подструктурой структуры M_1 , если $M_1 \supset M_2$ и для любой формулы $F(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma_k$ и для любых $a_1, \dots, a_n \in M_2$ выполняется

$$M_1 \models F(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow M_2 \models F(a_1, \dots, a_n).$$

Следствие 1. Пусть M_1 и M_2 — счетные консервативные сильные арифметики. Пусть $c \in M_1 \setminus N$.

Тогда для любого натурального числа k найдется такая k -элементарная подструктура M' структуры M_1 , что:

- 1) M' изоморфна M_2 ($M' \simeq M_2$);
- 2) M' является начальным отрезком структуры M_1 ;
- 3) $M' \subset \{x \mid M_1 \models x < c\}$.

Следствие 2. Пусть M — счетная сильная арифметика, $c \in M \setminus N$.

Тогда для любого k найдется такая k -элементарная подструктура M' структуры M , что:

- 1) $M \simeq M'$;
- 2) M' есть начальный отрезок структуры M ;
- 3) $M' \subset \{x \mid M \models x < c\}$.

Следствие 3. Пусть M — счетная сильная нестандартная арифметика.

Тогда найдется счетное элементарное расширение M_1 структуры M такое, что M конфинально M_1 и M_1 обладает следующим свойством: для любого $c \in M_1 \setminus N$ существует такая элементарная подструктура M' структуры M_1 , что:

- 1) $M_1 \simeq M'$;
- 2) M' является начальным отрезком структуры M_1 ;
- 3) $M' \subset \{x \mid M_1 \models x < c\}$.

Можно несколько ослабить условия леммы, а именно достаточно того, чтобы M_1 и M_2 были моделями не всей системы P_ω , а лишь $P_\omega \cap \Sigma_k^A$, где k — некоторое фиксированное число. Отсюда получается

Следствие 4. Пусть M — счетная слабая нестандартная арифметика.

Тогда для любого натурального числа k найдется начальный отрезок структуры M , являющийся k -элементарной подструктурой структуры M , но не являющийся моделью системы аксиом P .

Следствие 4 дает отрицательный ответ на вопрос, сформулированный в ⁽⁵⁾: является ли каждый начальный отрезок слабой арифметики M , замкнутый относительно всех функций, определяемых в M формулами из Σ_k , также моделью системы аксиом P ? (Определение классов Σ_k в ⁽⁵⁾ в принципе эквивалентно данному.)

Я выражаю благодарность В. А. Успенскому за помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Friedman, Lect. Notes Math., v. 337, 539 (1973). ² J. Hirschfeld, Lect. Notes Math., v. 369, 99 (1974). ³ А. Робинсон, Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, М., «Наука», 1967. ⁴ R. G. Phillips, Lect. Notes Math., v. 369, 195 (1974). ⁵ H. Gaifman, Lect. Notes Math., v. 255, 128 (1973).