

П. И. БАЛК

О РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ СЕМЕЙСТВ ТЕЛ, ОБЛАДАЮЩИХ СЛАБОЙ ЕДИНСТВЕННОСТЬЮ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИСТОЧНИКАМ ПОЛЯ ПО НЕСКОЛЬКИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ МОМЕНТАМ

(Представлено академиком М. А. Садовским 21 IV 1975)

Одним из перспективных путей развития теории решения обратной задачи гравиметрии является выявление классов тел, обладающих слабой единственностью ⁽⁴⁾. Другим важным направлением в практике интерпретации гравитационных аномалий в настоящее время признано определение гармонических моментов тяготеющих масс и последующее извлечение из них по принципу эквивалентного эллипса ^(2, 3) некоторой информации о положении и форме источников поля ⁽⁵⁾. В этой связи определенный интерес представляет алгоритм, синтезирующий оба направления и позволяющий по нескольким (первым) вычисленным моментам источников поля выбрать в каждом из заданных классов тел со слабой единственностью по одному, гармонические моменты любого из которых совпадают с вычисленными моментами интерпретируемых масс. Такой алгоритм позволяет построить ряд тел заданной формы, слабо эквивалентных возмущающему объекту. Выбор единственного из которых в качестве приближенного решения обратной задачи можно осуществить исходя из близости их потенциальных полей к наблюдаемому.

В работе предлагаются приемы аналитического решения обратной задачи, реализующие названный алгоритм на множестве построенных модельных классов цилиндрических тел и тел вращения.

Обратимся вначале к примерам слабой единственности среди семейств произвольно ориентированных в нижнем полупространстве двухпараметрических тел вращения неизвестной плотности σ ,

$$V = \{(\xi, \rho, \varphi) \mid -A \leq \xi \leq A, 0 \leq \rho \leq B\Psi(\xi, A), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad (1)$$

обеспечивающих выполнение равенства

$$\int_V \xi^m \eta^n \xi^i dV = \begin{cases} k_{m,n,l} A^{l+1} B^{m+n+2}, & m, n, l \in \{2i\}_{i=0}^{\infty}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (2)$$

здесь ξ, ρ, φ — цилиндрические, а ξ, η, ζ — декартовы координаты локальной системы отсчета: A, B — параметры формы тела (A определяет длину тела, B характеризует степень вытянутости тела вдоль оси симметрии ξ). Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты центра тяжести V , β — угол наклона оси ξ к вертикали Oz , α — угол, составленный проекцией оси ξ на плоскость $z=0$ с осью Ox основной координатной системы $Oxyz$. Параметры положения тела $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \alpha, \beta$ в совокупности с параметрами формы A, B и значением σ однозначно определяют любое тело семейства.

Доказательство слабой единственности выполним посредством гармонических моментов. Определим известным образом $\bar{x}, \bar{y}$ и $\bar{z}$ через моменты

нулевого и первого порядков. Совместим начало координат с эпицентром тяжести $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$. Вычислим I_{xz} и I_{yz} . Согласно (1)

$$\alpha = \arctg(I_{yz}/I_{xz}). \quad (3)$$

Повернем плоскость $z=0$ вокруг Oz на угол α и вычислим в новой системе отсчета моменты I_{xz} и $I_{x^2-z^2}$. Следуя (1), находим

$$\tg 2\beta = 2I_{xz}/(I_{x^2-z^2} + z^2 I_0). \quad (4)$$

Ограничимся общим случаем $\sin \beta \neq 0$. Тогда вычисление параметров A, B, σ потребует наряду с I_0 моменты $I_{x^2-y^2}$ и $I_{x^4-6x^2y^2+y^4}$. Используя формулы перехода от основной системы координат к локальной, допущение (2), а также вытекающую из (1) очевидную связь между собой коэффициентов вида $k_{m,n,l}$ и $k_{\bar{m},\bar{n},\bar{l}}$, находим

$$I_0 = k_{0,0,0} \sigma AB^2; \quad (5)$$

$$I_{x^2-y^2} = I_0 \sin^2 \beta \{K_{0,0,2} A^2 - K_{2,0,0} B^2\}; \quad (6)$$

$$I_{x^4-6x^2y^2+y^4} = I_0 \sin^4 \beta \{K_{4,0,0} B^4 - 6K_{2,0,2} A^2 B^2 + K_{0,0,4} A^4\}, \quad (7)$$

где $K_{m,n,l} = k_{m,n,l}/k_{0,0,0}$.

Из формулы (6) получаем

$$A^2 = K_{0,0,2}^{-1} \{K_{2,0,0} B^2 + I_{x^2-y^2}/(I_0 \sin^2 \beta)\}. \quad (8)$$

Внесем правую часть равенства (8) в выражение (7); приходим к биквадратному уравнению для параметра B :

$$D_2 b^2 + D_1 b + [D_0 - I_{x^4-6x^2y^2+y^4}/(I_0 \sin^4 \beta)] = 0, \quad b = B^2; \quad (9)$$

$$D_2 = K_{4,0,0} - 6K_{2,0,2} K_{2,0,0}/K_{0,0,2} + K_{0,0,4} K_{2,0,0}^2/K_{0,0,2}^2; \quad (10)$$

$$D_1 = d_1 I_{x^2-y^2}/(I_0 \sin^2 \beta), \quad D_0 = K_{0,0,4} [I_{x^2-y^2}/(K_{0,0,2} I_0 \sin^2 \beta)]^2; \quad (11)$$

$$d_1 = 2(K_{0,0,4} K_{2,0,0}/K_{0,0,2} - 3K_{2,0,2})/K_{0,0,2}. \quad (12)$$

Достаточным условием разрешимости обратной задачи в рассматриваемых классах тел является единственность решения ($A, B > 0$) уравнений (8) и (9). В свою очередь, достаточным условием однозначности положительного решения системы уравнений (8) и (9) (в предположении неравенства D_1 и D_2 нулю одновременно) является выполнение одного из неравенств

$$\bar{b} \leq 0, \quad b^* > \bar{b}, \quad (13)$$

где $\bar{b}$ — положение проекции вершины параболы из левой части (9) на ось b (верхняя граница значений меньшего корня уравнения), а b^* — минимально допустимое равенством (8) значение корня уравнения (9)

$$b^* = -D^* I_{x^2-y^2}/I_0 \sin^2 \beta, \quad D^* = 1/K_{2,0,0}. \quad (14)$$

Дифференцируя (9) по b , находим

$$\bar{b} = -\bar{D} I_{x^2-y^2}/I_0 \sin^2 \beta, \quad \bar{D} = 0,5 d_1/D_2. \quad (15)$$

Численные значения параметров B, A и σ могут быть получены в явном виде путем последовательного решения уравнений (9), (8), (5). Полагая известным один из параметров A, B, σ , решение обратной задачи получим, используя лишь моменты не выше второго порядка.

Рассмотрим некоторые конкретные классы тел.

1. Пусть в (1)

$$\Psi = \psi_1 = 1 - (\xi/A)^2. \quad (16)$$

Находим

$$k_{0,0,0}=16\pi/15, \quad K_{2,0,0}=^{4/}_{21}, \quad K_{0,0,2}=^{1/}_{7}, \quad K_{4,0,0}=^{80/}_{1001}, \quad K_{2,0,2}=^{1/}_{231}, \\ K_{0,0,4}=^{1/}_{21}, \quad D^*=5,25, \quad \bar{D}=^{273/}_{88}, \quad D^*>\bar{D}>0. \quad (17)$$

2. Положим в (1)

$$\Psi=\Psi_2=\ln \{(1-e)|\xi|/A+e\}. \quad (18)$$

Имеем

$$k_{0,0,0}=2\pi(e-2)/(e-1), \quad k_{2,0,0}=1,5\pi(3e-8)/(e-1), \\ k_{0,0,2}=\pi(37e^3-180e^2+27e-4)/(27(e-1)^3), \quad k_{4,0,0}=1,25\pi(53e-144)/(e-1), \\ k_{2,0,2}=\pi(4165e^3-11664e^2+729e-16)/(972(e-1)^3), \quad (19) \\ k_{0,0,4}=2\pi(5599e^3/9000-2e^4+e^3-4e^2/9+e/8-^{2/}_{125})/(e-1)^5, \\ D^*\approx 6,48, \quad \bar{D}\approx 3,11, \quad D^*>\bar{D}>0.$$

3. Выберем в качестве Ψ функцию

$$\psi_3=\sin(\pi|\xi|/A). \quad (20)$$

Тела изучаемого класса могут быть использованы в отдельных случаях для поиска начального приближения многосвязного гравитирующего объекта, обладающего двумя полюсами сгущения локальных источников.

$$k_{0,0,0}=\pi, \quad K_{2,0,0}=^{3/}_{16}, \quad K_{0,0,2}=(2\pi^2-3)/(6\pi^2), \quad K_{4,0,0}=^{5/}_{64}, \\ K_{2,0,2}=(8\pi^2-15)/(128\pi^2), \quad K_{0,0,4}=(2\pi^4-10\pi^2+15)/(10\pi^4), \\ D^*=^{16/}_{3}, \quad \bar{D}=\frac{72(135+30\pi^2-32\pi^4)}{585+1650\pi^2-712\pi^4}, \quad D^*>\bar{D}>0. \quad (21)$$

Коэффициент D_2 в рассмотренных классах отличен от нуля. Следовательно, доказательство однозначности решения обратной задачи требует лишь последования случая $I_{x^2-y^2}\neq 0$; если $I_{x^2-y^2}>0$, то в (13) выполняется первое достаточное условие единственности, в противном случае — второе.

Рассмотрим теперь решение обратной задачи в классах горизонтальных цилиндрических тел длины $2H$

$$V=\{(\xi, \eta, \zeta) \mid |\xi|\leq A, \quad |\eta|\leq H, \quad |\zeta|\leq B\Psi(\xi, A), \quad \Psi(0, A)=1, \quad \Psi(A, A)=0\}, \quad (22)$$

для которых

$$\int_V \xi^m \eta^n \zeta^l dV = \begin{cases} k_{m,n,l} A^{l+1} B^{m+1} H^{n+1}, & m, n, l \in \{2i\}_{i=0}^\infty, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (23)$$

Пусть α — угол между осью цилиндра и осью Ox системы отсчета с началом в точке $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$. Тогда

$$\alpha = \arctg(I_{yz}/xz) + \pi/2. \quad (24)$$

Зная α , определим по (4) угол β между осью ξ и вертикалью, где входящие в (4) моменты вычислены в системе отсчета с началом в $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ и осью y коллинеарной оси η . Находим далее, что

$$I_{x^2-y^2}=I_0\{K_{0,2,0}H^2-K_{2,0,0}\cos^2\beta B^2-K_{0,0,2}\sin^2\beta A^2\}; \quad (25)$$

$$I_{x^2-z^2}=I_0\{K_{0,2,0}H^2-K_{2,0,0}\sin^2\beta B^2-K_{0,0,2}\cos^2\beta A^2-\bar{z}^2\}; \quad (26)$$

$$I_{xz}=^{1/}_{2}I_0\sin 2\beta\{K_{2,0,0}B^2-K_{0,0,2}A^2\}; \quad (27)$$

$$I_0=k_{0,0,0}\sigma ABH. \quad (28)$$

Ограничимся для простоты случаями, когда один из параметров A, B, H и σ фиксирован. Пусть задано σ . В этом случае параметры формы A, B, H определяются из совместного решения уравнений (25), (27), (28) либо

уравнений (25), (26), (28) в зависимости от того, равен косинус 2β нулю или нет. Доказательство единственности решения названных систем уравнений, а также способ их решения см. в (1).

Пусть теперь фиксируется один из параметров A , B и H . Оба искомых параметра формы вычисляются по моментам $I_{y^2-x^2}$ и $I_{y^2-z^2}$ ($\cos 2\beta \neq 0$) или по моментам $I_{y^2-x^2}$ и I_{xz} ($\cos 2\beta = 0$). Плотность σ в обоих случаях находим из (28).

В качестве Ψ в (22) могут быть взяты, в частности, рассмотренные ранее функции ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 .

Для $\Psi = \psi_1$

$$k_{0,0,0} = 16/3, \quad K_{2,0,0} = 8/35, \quad K_{0,2,0} = 1/3, \quad K_{0,0,2} = 1/5; \quad (29)$$

для $\Psi = \psi_2$

$$k_{0,0,0} = 8/(e-1), \quad K_{2,0,0} = 2(3-e)/3, \quad K_{0,2,0} = 1/3, \\ K_{0,0,2} = (2-9e+18e^2-5e^3)/(18(e-1)^2); \quad (30)$$

для $\Psi = \psi_3$

$$k_{0,0,0} = 16/\pi, \quad K_{2,0,0} = 2/9, \quad K_{0,2,0} = 1/3, \quad K_{0,0,2} = 0,5(\pi^2-4)/\pi^2. \quad (31)$$

Привлекая дополнительно к уравнениям (25) — (28) один из моментов четвертого порядка, можно для ряда конкретных функций Ψ получить в замкнутом виде решение обратной задачи, когда все четыре параметра A , B , H и σ являются искомыми.

Примеры конкретных семейств тел (1) и (22) нетрудно разнообразить как за счет новых элементарных функций Ψ и их комбинаций (например, $\Psi = 1 - \operatorname{tg}(\pi|\xi|/4A)$, $\Psi = e^{|\xi|/A} - e|\xi|/A$), так и путем наращивания числа свободных (варьируемых) параметров формы тел (например, $\Psi = 1 - (|\xi|/A)^n$). Решение обратной задачи по описанному алгоритму можно получить и для иных классов тел, в частности, не обладающих тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии.

В заключение следует сделать два замечания.

1. Существующими методами достаточно надежно определяются только несколько первых моментов. В связи с этим построение широкого набора модельных классов тел с фиксированным числом параметров, решение обратной задачи для которых проводится по единым формулам и требует ограниченного количества моментов, представляется на настоящем этапе более перспективным подходом к интерпретации моментов, чем построение отдельных универсальных классов тел с неограниченно возрастающим числом параметров, допускающих аппроксимацию источников поля с заданной точностью.

2. Если σ — искомый параметр, то описанные модельные классы могут и не содержать тела, слабо эквивалентного интерпретируемому. Например, для класса тел (1) с $\Psi = \psi_1$ такое возможно, когда вычисленный момент $I_{x^4-6x^2y^2+y^4} \leq 0$.

Автор приносит глубокую благодарность В. Н. Страхову за конструктивное обсуждение выбора направления исследований.

Институт геохимии
Сибирского отделения Академии наук СССР
Иркутск

Поступило
15 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. И. Балк, ДАН, т. 220, № 2 (1975). ² В. Н. Страхов, Тр. МГРИ, т. 32 (1955).
³ В. Н. Страхов, Е. П. Пучков, Физика Земли, № 8 (1971). ⁴ В. Н. Страхов, Физика Земли, № 2 (1972). ⁵ А. В. Цирульский, Физика Земли, № 7 (1974).