

УДК 62-501.32

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. А. БОДНЕР, А. Г. УРУМЯНЦ

**О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЯ
ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 20 II 1975)

1. Рассмотрим многомерную динамическую систему

$$dx/dt = A(t)x + q(t) + \varepsilon(t), \quad (1)$$

где x — вектор фазовых координат; $A(t)$ — матрица коэффициентов; $q(t)$ — вектор внешних воздействий, являющийся произвольной функцией времени; $\varepsilon(t)$ — вектор внешнего воздействия типа белого шума. Начальное отклонение фазового вектора x случайно и описывается некоторой заданной функцией плотности распределения вероятности $p_0(x)$.

Плотность распределения фазового вектора $p(x, t)$ во все последующие моменты времени подчиняется уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\operatorname{div}[(A(t)x + q(t))p] + \sum_{i,k=1}^n h_{ik} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} \quad (2)$$

при начальном условии $p(x, 0) = p_0(x)$.

Последний член в уравнении (2) описывает влияние белого шума.

Поведение динамической системы можно уподобить модели «фазового газа», при этом уравнение (2) описывает изменение плотности «газа», который заполняет фазовое пространство в начальный момент с плотностью $p_0(x)$. «Частицы газа» движутся по закону (1) и в силу различия плотностей диффундируют в направлении меньших плотностей. На языке такой модели коэффициенты h_{ik} в уравнении (2) являются коэффициентами диффузии «фазового газа», положительно определенная матрица H , составленная из этих коэффициентов, называется матрицей диффузии.

2. Зададимся целью найти n линейно-независимых инвариантов l_i , $i=1, \dots, n$, движения системы (1), которые будем искать в виде линейных функций фазовых координат

$$l(t) = L(t)x + g(t), \quad (3)$$

$$l(t) = \begin{bmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_n(t) \end{bmatrix}, \quad L(t) = \begin{bmatrix} L_{11}(t), \dots, L_{1n}(t) \\ \vdots \\ L_{n1}(t), \dots, L_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

Потребуем теперь инвариантности вектора $l(t)$ относительно движения системы, т. е.

$$dl/dt = 0, \quad (4)$$

или

$$\frac{dL(t)}{dt}x + L(t)\frac{dx}{dt} + \frac{dg(t)}{dt} = 0 \quad (5)$$

С помощью (1) перепишем (5) в виде

$$[dL(t)/dt + L(t)A(t)]x + L(t)q_1(t) + dg(t)/dt = 0, \quad (6)$$

где $q_1(t) = q(t) + \varepsilon(t)$.

Для тождественного выполнения (6) достаточно потребовать

$$dL(t)/dt = -L(t)A(t); \quad (7)$$

$$dg(t)/dt = -L(t)q_1(t). \quad (8)$$

Всегда можно найти решение $L(t)$ матричного уравнения (7), которое будет удовлетворять начальному условию

$$L(0) = E, \quad (9)$$

где E — единичная матрица. При этом $L(t)$ есть фундаментальная матрица системы

$$dy'/dt = -y'A(t), \quad (10)$$

где y' — вектор-строка.

Найдя, таким образом, $L(t)$, в качестве $g(t)$ можно взять

$$g(t) = - \int_0^t L(\varphi) q_1(\varphi) d\varphi, \quad (11)$$

при этом, очевидно,

$$g(0) = 0. \quad (12)$$

Линейная независимость найденных инвариантов движения как функций от x при любом t вытекает из линейной независимости строк фундаментальной матрицы $L(t)$.

Смысл инвариантного вектора l в начальный момент времени $t=0$, как видно из (3) с помощью (9) и (12)

$$l(x, 0) = x.$$

Это означает, что для любой «частицы», движущейся по траектории системы (1), в силу инвариантности l ,

$$l(x(t), t) = x_0,$$

где x_0 — начальное положение частицы.

Таким образом, найденные линейно-независимые инварианты есть не что иное, как начальные координаты «фазовой частицы», имеющей в момент времени t положение x , в предположении, что частица все время двигалась по траектории системы (1) и не была «сбита в сторону» случайными помехами, обуславливающими диффузию «фазового газа».

3. Рассмотрим определитель фундаментальной матрицы $L(t)$. Можно видеть, что

$$\det L(t) = \frac{\partial(l_1, \dots, l_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}, \quad (13)$$

$$\det L(0) = 1,$$

поэтому $\det L(t)$ не обращается в нуль ни при каком t , как детерминант фундаментальной матрицы. Следовательно, $\det L(t) > 0$ при всех t . Отсюда

$$|\det L(t)| = \left| \frac{\partial(l_1, \dots, l_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| = \frac{V_0}{V}, \quad (14)$$

где V_0 — величина некоторого произвольного объема, выделенного в фазовом пространстве в начальный момент времени; V — величина объема, в который преобразуется V_0 к моменту времени t по законам движения (1).

Для отношения плотностей в точках траектории движения, подчиняющегося (1), получим

$$\det L(t) = p/p_0, \quad (15)$$

где p и p_0 — плотности фазового газа на траектории соответственно в моменты времени t и 0 . Теперь, логарифмируя и дифференцируя (15), получим

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\det L(t)} \frac{d(\det L(t))}{dt}.$$

С другой стороны, известно, что при движении без диффузии

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = -\text{Sp } A(t),$$

где $\text{Sp } A(t)$ — след матрицы $A(t)$. Отсюда

$$d(\det L)/dt + \det L \text{Sp } A = 0. \quad (16)$$

Последнее соотношение пригодится в дальнейшем.

4. Перейдем в уравнении (2) к новой плотности распределения

$$p_1 = p / \det L(t),$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} = & -\frac{p_1}{\det L} \frac{d(\det L)}{dt} - p_1 \text{div}(Ax+q) - (\text{grad } p_1, (Ax+q)) + \\ & + \sum_{i,k=1}^n h_{ik} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i \partial x_k}. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что

$$\text{div}(Ax+q) = \text{Sp } A; \quad (18)$$

$$\partial p_1 / \partial t + (\text{grad } p_1, (Ax+q)) = dp_1 / dt, \quad (19)$$

и пользуясь (16), приведем (17) к виду

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum h_{ik} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (20)$$

Перейдем теперь в уравнении (20) от переменных x, t к переменным l, t ; такая замена законна, поскольку

$$\frac{\partial(l_1, \dots, l_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

В новых переменных

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left(\text{grad } p_1, \frac{dl}{dt} \right) = \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{j,r=1}^n L_{jr} L_{rk} \frac{\partial^2 p_1}{\partial l_j \partial l_r},$$

откуда после умножения на h_{ik} и суммирования

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^n h_{ik} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i \partial x_k} &= \sum_{j,r=1}^n \gamma_{jr}(t) \frac{\partial^2 p_1}{\partial l_j \partial l_r}, \\ \gamma_{jr}(t) &= \sum_{i,k=1}^n h_{ik} L_{ji} L_{rk}. \end{aligned} \quad (22)$$

Если обозначить через Γ матрицу, составленную из элементов γ_{jr} , то переход от H к Γ запишется как

$$\Gamma = LHL'. \quad (23)$$

Заметим, что матрица Γ положительно определенная, поскольку H положительно определенная, а переход (23) соответствует замене базиса в квадратичных формах.

Теперь перепишем (20), используя (22) в переменных l, t

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \sum_{j,r=1}^n \gamma_{jr}(t) \frac{\partial^2 p_1}{\partial l_j \partial l_r}. \quad (24)$$

Таким образом, из (2) получено параболическое уравнение второго порядка с зависящими от времени коэффициентами. Решение такого уравнения дано в ^(1, 2), поэтому приведем здесь готовые результаты.

5. Фундаментальное решение уравнения (24)

$$z(l, t, \xi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\alpha, l - \xi)] V(t, \alpha, \tau) d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где $V(t, \alpha, \tau)$ — решение уравнения

$$\frac{dV}{dt} = \left(- \sum_{j,r=1}^n \gamma_{jr}(t) \alpha_j \alpha_r \right) V \quad (25)$$

при условии $V(t, \alpha, \tau) |_{t=\tau} = 1$.

Решение уравнения (24), удовлетворяющее начальному условию $p_1(l, 0) = p_0(l)$, запишется как

$$p_1(l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} z(l, t, \xi, 0) p_0(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (26)$$

Резюмируя все сказанное, переходя к исходной плотности $p = p_1 \det L$, можно написать решение уравнения (2):

$$p(x, t) = \frac{\det L}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\alpha, L(t)x - \xi - \int_0^t L(\varphi) q_1(\varphi) d\varphi \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \sum_{j,r=1}^n \gamma_{jr}(\tau) \alpha_j \alpha_r d\tau \right] d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right\} p_0(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (27)$$

где $L(t)$ — решение уравнения (7) при начальном условии (9) и $p_0(x)$ — начальное распределение плотности вероятности.

Если уравнение (1) описывает поведение информационной системы, то решение (27) для (2) позволяет определить энтропию системы, количество информации, информационную надежность и т. д.

Поступило
20 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, т. 1, в. 7 (1938). ² С. Д. Эйдельман, Матем. сб., т. 23 (75) (1953).