

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, С. С. ЛИНЧУК,
Н. И. НАГНИБИДА

О ЗАДАЧЕ УИТТЕКЕРА В ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В теории аналитических функций известна следующая интерполяционная задача Уиттекера: пусть даны два множества целых неотрицательных чисел P и Q и две целые функции $f(z)$ и $g(z)$; требуется выяснить существование и найти также целую функцию $h(z)$, удовлетворяющую соотношениям

$$h^{(n)}(1) = f^{(n)}(1), \quad n \in P, \quad h^{(n)}(0) = g^{(n)}(0), \quad n \in Q. \quad (1)$$

Отметим, что некоторые достаточные условия разрешимости этой задачи получены ранее в ⁽¹⁾, а случай, когда хотя бы одно из множеств $N \setminus P$ или $N \setminus Q$ (здесь $N = \{n\}_{n=0}^{\infty}$) конечно, рассмотрен в ⁽²⁾.

В настоящей заметке задача Уиттекера решается нами в некоторых классах целых функций экспоненциального типа с помощью интерполяционного метода Абеля — Гончарова. Полученные результаты применяются также для доказательства некоторых новых утверждений, касающихся известной проблемы о двух точках ⁽³⁾.

1. С помощью метода, аналогичного применяемому для доказательства теоремы 3.2.2 из ⁽³⁾, стр. 332, а также учитывая условия квазистепенной базисности системы $\{z^n e^{\beta_n z}\}$ из ⁽⁴⁾, предварительно получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\{\beta_n\}$ — ограниченная последовательность комплексных чисел.

Тогда каждая целая функция $\varphi(z)$ из класса

$$\left[1, \frac{\ln 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n|} \right)$$

представима в любой точке z рядом

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(\beta_n) \gamma_n(z), \quad (2)$$

где $\gamma_n(z)$, $n=0, 1, \dots$, — полиномы интерполяционного процесса Абеля — Гончарова, построенные по последовательности $\{\beta_n\}$.

Это утверждение является некоторым уточнением теоремы 3.2.2 из ⁽³⁾.

Заметим, далее, что если целая функция $\varphi(z)$ разлагается в равномерном сходящийся на каждом компакте ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma_n(z)$, то это необходимо будет разложение (2), так как $\gamma_n^{(k)}(\beta_k) = \delta_{n,k}$. Этот факт справедлив, например, для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma_n(z) \quad \text{с} \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |c_n|^{1/n} < \frac{\ln 2}{\sup |\beta_n|}$$

ибо (см. (3), стр. 318)

$$|\gamma_n(z)| \leq A \left(\frac{\sup |\beta_n|}{\ln 2} \right)^n \cdot 2^{|z|}, \quad (3)$$

где n и z — произвольные, а постоянная A от них не зависит.

2. Из предыдущего непосредственно вытекает

Теорема 2. Пусть множества P и Q составляют разбиение множества N , т. е. $P \cup Q = N$ и $P \cap Q = \emptyset$, функции $f(z)$ и $g(z)$ принадлежат классу $[1, \ln 2]$, а $\beta_n = 1$ при $n \in P$, и $\beta_n = 0$ при $n \in Q$.

Тогда существует единственная функция $h(z)$, также принадлежащая классу $[1, \ln 2]$ и удовлетворяющая соотношениям (1).

Действительно, предполагая, что решение задачи Уиттекера в классе $[1, \ln 2]$ существует, мы на основании теоремы 1 с необходимостью заключаем, что оно в каждой точке z представляется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma_n(z),$$

где $c_n = f^{(n)}(1)$ при $n \in P$, и $c_n = g^{(n)}(0)$ при $n \in Q$, $\gamma_n(z)$ — полиномы Гончарова, построенные по рассматриваемой последовательности $\{\beta_n\}$. С другой стороны, как легко видеть (с учетом оценок (3)), ряд

$$\sum_{n \in P} f^{(n)}(1) \gamma_n(z) + \sum_{n \in Q} g^{(n)}(0) \gamma_n(z)$$

сходится равномерно на каждом компакте, а его сумма принадлежит классу $[1, \ln 2]$ и удовлетворяет условиям (1). Следовательно, если задачу Уиттекера ставить в классе $[1, \ln 2]$, то в нем она всегда однозначно разрешима, если только множества P и Q образуют разбиение множества N .

Замечание 1. Если, как и раньше, функции $f(z)$ и $g(z)$ взяты из класса $[1, \ln 2]$, а $P \cup Q \neq N$ и $P \cap Q = \emptyset$, то, очевидно, задача Уиттекера также разрешима в классе $[1, \ln 2]$, но уже неоднозначно. Действительно, определяя, например, полиномы $\gamma_n(z)$ по последовательности $\{\beta_n\}$ ($\beta_n = 1$ при $n \in P$ и $\beta_n = 0$ при $n \in N \setminus P$), среди всех решений этой задачи найдем и функции вида

$$h(z) = \sum_{n \in P} f^{(n)}(1) \gamma_n(z) + \sum_{n \in Q} g^{(n)}(0) \gamma_n(z) + \sum_{n \in N \setminus (P \cup Q)} c_n \gamma_n(z),$$

где $\{c_n\}$ — некоторая совокупность произвольных постоянных, для которой в случае бесконечности множества $N \setminus (P \cup Q) = N_1$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty (n \in N_1)} |c_n|^{1/n} < \ln 2.$$

Если же $P \cap Q \neq \emptyset$, то, очевидно, задача Уиттекера разрешима в классе $[1, \ln 2]$ тогда и только тогда, когда для $\forall s \in P \cap Q$

$$\left(\sum_{n \in P} f^{(n)}(1) \gamma_n(z) + \sum_{n \in Q} g^{(n)}(0) \gamma_n(z) \right)^{(s)} \Big|_{z=0} = g^{(s)}(0),$$

где $\gamma_n(z)$ построены по последовательности $\{\beta_n\}$. В этом случае при выполнении указанного условия решение единственно, если $P \cup Q = N$, и не единственно, если $P \cup Q \neq N$.

Замечание 2. Отметим, что аналогично решается и обобщение задачи Уиттекера, касающейся большого числа множеств типа P и Q , а также для другого набора исходных точек β_n (вместо 0 и 1). Правда, теперь соответственно изменится и класс целых функций. Например, если в качестве

ве исходных точек взять α и β , то функции нужно будет брать из класса

$$\left[1, \frac{\ln 2}{\max(|\alpha|, |\beta|)}\right).$$

Интересно в связи с этим, что если пользоваться теоремой 1 и сделать замену переменных $w = (\alpha - \beta)z + \beta$, то мы уже придем к классу

$$\left[1, \frac{\ln 2}{|\alpha - \beta|}\right).$$

Кроме того, условия разрешимости задачи Уиттекера в других классах целых функций можно получать на основании соответствующего утверждения, аналогичного теореме 1, если исходить из иных условий базисности системы $\{z^n e^{\beta_n z}\}$. Например (см. ⁽⁵⁾), если β_n таковы, как и раньше, и

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_{k+1} - \beta_k| \rightarrow 0,$$

то условия разрешимости задачи Уиттекера получаются уже в классе $[1, \infty)$.

3. Приведем некоторые следствия для проблемы о двух точках (см. ⁽³⁾, стр. 468).

Теорема 3. Если P и Q составляют разбиение множества N , то каждая функция $h(z)$ из класса $[1, \ln 2)$, удовлетворяющая условиям

$$h^{(n)}(1) = 0, n \in P, \quad h^{(n)}(0) = 0, n \in Q, \quad (4)$$

является тождественным нулем.

Теорема 4. Если P и Q составляют разбиение множества N , а $\beta_n = 1$ при $n \in P$ и $\beta_n = 0$ при $n \in Q$, причем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_{k+1} - \beta_k| \rightarrow 0,$$

то каждая функция $h(z)$, принадлежащая классу $[1, \infty)$ и удовлетворяющая соотношениям (4), является тождественным нулем.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
30 IV 1975

Черновицкий государственный университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. Vermes, J. Anal. Math., v. 2, 150 (1952–1953). ² И. И. Ибрагимов, Н. И. Нагнибида, ДАН, т. 222, № 6 (1975). ³ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, М., «Наука», 1971. ⁴ И. И. Ибрагимов, С. С. Линчук, Н. И. Нагнибида, ДАН, т. 214, № 3, 502 (1974). ⁵ М. А. Евграфов, А. Д. Соловьев, ДАН, т. 113, № 3, 493 (1957).