

О. И. КУЗНЕЦОВА

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ТРЕУГОЛЬНОГО ВИДА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 24 II 1975)

Обозначим через C^* пространство непрерывных функций $f(x, y)$, периодических с периодом 2π по каждой из переменных x, y , где, как обычно,

$$\|f\|_{C^*} = \max_{x, y} |f(x, y)|.$$

При рассмотрении двойного ряда Фурье

$$f(x, y) \sim \sum_{\mu, \nu=-\infty}^{\infty} c_{\mu, \nu} e^{i(\mu x + \nu y)}, \quad f(x, y) \in C^*, \quad (1)$$

возможны различные варианты понятия частной суммы этого ряда. Среди них, наряду с частными суммами прямоугольного вида

$$S_{M, N}^{\square}(f; x, y) = \sum_{|\mu| \leq M, |\nu| \leq N} c_{\mu, \nu} e^{i(\mu x + \nu y)} \quad (2)$$

и сферическими частными суммами

$$S_R(f; x, y) = \sum_{\mu^2 + \nu^2 \leq R^2} c_{\mu, \nu} e^{i(\mu x + \nu y)}, \quad (3)$$

столь же естественными являются частные суммы треугольного вида

$$S_{M, N}^{\Delta}(f; x, y) = \sum_{\substack{|\mu| \\ M}}^{\substack{|\nu| \\ N}} c_{\mu, \nu} e^{i(\mu x + \nu y)}. \quad (4)$$

Если $T(x, y)$ — некоторый тригонометрический полином, т. е. конечная тригонометрическая сумма (1), то можно определить его порядок как пару наименьших значений M и N , при которых $T(x, y) = S_{M, N}^{\square}(T; x, y)$, или как наименьшее значение R , при котором $T(x, y) = S_R(T; x, y)$. Зафиксировав то или иное положительное значение l , можно также однозначно определить порядок $(m, n)_l^{\Delta}$ суммы $T(x, y)$ и в смысле (4) как пару наименьших значений M и N , для которых $M/N = l$ и $T(x, y) = S_{M, N}^{\Delta}(T; x, y)$. При $l=1$ определенный таким образом порядок полинома $T(x, y)$ в литературе иногда называют его кумулятивным порядком (см., например, (1)).

Пусть $U(f; x, y)$ — некоторый определенный в пространстве C^* полиномиальный оператор, т. е. линейный оператор, отображающий C^* в его конечномерное подпространство $\mathfrak{S}$ тригонометрических полиномов так, что если $T(x, y) \in \mathfrak{S}$, то $U(T; x, y) = T(x, y)$. Полиномиальные операторы $U(f; x, y)$, для которых пространство $\mathfrak{S}$ при некотором l совпадает с совокупностью всех тригонометрических полиномов $T(x, y)$, имеющих порядок

$(\mu, \nu)_i^\Delta$, не превышающий заданный порядок $(m, n)_i^\Delta$, естественно назвать полиномиальными операторами треугольного вида $(m, n)_i^\Delta$. Аналогичным образом могут быть определены классы полиномиальных операторов, соответствующие другим возможным определениям порядка тригонометрического полинома.

Настоящая заметка посвящена рассмотрению некоторых задач, относящихся к полиномиальным операторам треугольного вида и, в частности, задаче о поведении норм таких операторов в пространстве C^* . В одномерном случае исследованию различных свойств полиномиальных операторов посвящены работы С. М. Лозинского ^(2, 3) и Д. Л. Бермана ⁽⁴⁾.

Имеет место следующая

Теорема 1. Для полиномиальных операторов $U(f; x, y)$ треугольного вида $(m, n)_i^\Delta$ равномерно относительно всех натуральных значений m, n и $l=m/n$ справедливо асимптотически точное неравенство

$$\|U\|_{C^*} \geq \frac{32}{\pi^4} \ln m \cdot \ln n - \frac{16}{\pi^4} \ln^2 n + O(\ln m + \ln n). \quad (5)$$

В основе доказательства неравенства (5) лежит тождество типа Марцинкевича — Зигмунда — Д. Л. Бермана (см. ⁽⁵⁾, стр. 481) и

Теорема 2. Равномерно относительно всех натуральных m, n и $l=m/n$ имеет место асимптотическое равенство

$$\sup_{|f(x,y)| \leq 1} S_{m,n}^\Delta(f; x, y) = \frac{32}{\pi^4} \ln m \cdot \ln n - \frac{16}{\pi^4} \ln^2 n + O(\ln m + \ln n). \quad (6)$$

Следует провести сравнение равенства (6) для частных сумм Фурье треугольного вида с равенством

$$\sup_{|f(x,y)| \leq 1} S_{m,n}^\square(f; x, y) = \frac{16}{\pi^4} \ln m \cdot \ln n + O(\ln m + \ln n) \quad (7)$$

для прямоугольных частных сумм, которое является простым следствием хорошо известной оценки одномерных констант Лебега. Из такого сравнения видно, что при каждом фиксированном натуральном $l=m/n$ правые части (6) и (7) асимптотически совпадают. В частном случае, когда $l=1$, этот факт был ранее установлен в работе ⁽⁶⁾. В то же время представляется неожиданным то обстоятельство, что в случае, когда отношение $l=m/n$ растет достаточно быстро, асимптотическое значение норм $\|S_{m,n}^\Delta\|_{C^*}$ становится вдвое больше асимптотического значения норм $\|S_{m,n}^\square\|_{C^*}$.

Доказательство теоремы 2 в общем случае требует довольно кропотливых рассмотрений аналитического характера, связанных со сравнительно сложной структурой ядра

$$\begin{aligned} \Delta_{m,n}(x, y) = & \frac{\sin^{1/2}(n+1)(lx+y) \cdot \sin^{1/2}(n+1)(lx-y)}{\sin^{1/2}(lx+y) \cdot \sin^{1/2}(lx-y)} + \\ & + \frac{\sin^{1/2}n(lx+y) \cdot \sin^{1/2}n(lx-y)}{\sin^{1/2}(lx+y) \cdot \sin^{1/2}(lx-y)} \cdot \frac{\sin(l-1/2)x}{\sin^{1/2}x} \end{aligned} \quad (8)$$

в интегральном представлении

$$S_{m,n}^\Delta(f; x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u, y+v) \Delta_{m,n}(u, v) du dv \quad (9)$$

для треугольных частных сумм (4).

Из неограниченности последовательности норм $\|S_{m,n}^\Delta\|_{C^*}$ следует, что при любом натуральном l существуют функции $f(x, y) \in C^*$, для которых последовательность частных сумм $S_{ln,n}^\Delta(f; x, y)$ расходится. Вместе с тем справедлива

Теорема 3. При любом натуральном значении l для всех функций $f(x, y) \in C^*$ последовательность средних арифметических

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_{lk,k}^{\Delta}(f; x, y), \quad (10)$$

когда $n \rightarrow \infty$, сходится к $f(x, y)$ равномерно относительно x и y .

Аналогичное утверждение, обобщающее один результат Марцинкевича ⁽⁷⁾, имеет место и для частных сумм $S_{m,n}^{\square}$.

Теорема 4. При любом натуральном значении l для всех функций $f(x, y) \in C^*$ последовательность

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_{lk,k}^{\square}(f; x, y), \quad (11)$$

когда $n \rightarrow \infty$, сходится к $f(x, y)$ равномерно относительно x и y .

В случае $l=1$ утверждение теоремы 4 принадлежит Марцинкевичу ⁽⁷⁾.

Известно ⁽⁸⁾, что для функций $f(x, y)$, принадлежащих пространству L_p , $p > 1$, на квадрате $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$, при любом фиксированном l последовательности частных сумм $S_{m,n}^{\Delta}(f; x, y)$ и $S_{m,n}^{\square}(f; x, y)$ почти всюду сходятся к $f(x, y)$. При $p=1$ такое утверждение уже неверно. Однако для частных сумм $S_{m,n}^{\Delta}(f; x, y)$, как и для прямоугольных частных сумм $S_{m,n}^{\square}(f; x, y)$ (см. ⁽⁸⁾), имеет место следующее утверждение типа известной теоремы Д. Е. Меньшова об «исправлении» (см. ⁽¹⁰⁾, гл. VI).

Теорема 5. Какой бы ни была измеримая по Лебегу почти всюду конечная функция $f(x, y)$, при любом натуральном значении l и любом $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\varphi(x, y)$, отличающаяся от $f(x, y)$ лишь на множестве, мера которого меньше ε , и такая, что последовательность частных сумм $S_{m,n}^{\Delta}(\varphi; x, y)$ треугольного вида, когда $n \rightarrow \infty$, сходится к $\varphi(x, y)$ равномерно относительно x и y .

В заключение автор выражает признательность проф. А. Ф. Тиману за внимание к работе.

Днепропетровский химико-технологический институт

Поступило
21 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Shapiro, Abstract Spaces and Approximation, ISNM 10, Basel – Stuttgart, 1969.
² С. М. Лозинский, ДАН, т. 61, № 2, 193 (1948). ³ С. М. Лозинский, ДАН, т. 89, № 5, 785 (1953). ⁴ Д. Л. Берман, ДАН, т. 91, № 6, 1249 (1953). ⁵ А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. ⁶ И. К. Даугавет, Методы вычислений, № 6, 8 (1970). ⁷ J. Marcinkiewicz, Collected Papers, Warszawa, 1964. ⁸ Ch. Fefferman, Bull. Am. Math. Soc., v. 72, 191 (1971). ⁹ Г. М. Черномащенко, ДАН, т. 176, № 2, 277 (1967). ¹⁰ Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961.