

М. Р. БУНЯТОВ

КОГОМОЛОГИИ КОЛМОГорова для абстрактных булевых алгебр с замыканием

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 II 1975)

В данной работе вводятся когомологии для абстрактных булевых алгебр с замыканием. С этой целью привлекается понятие булевой цепи, введенной автором ⁽²⁾. Эти когомологии являются обобщением классических колмогоровских когомологий ^(3, 4) на случай булевых алгебр с замыканием.

Пусть S — абстрактная булева алгебра и G — R -модуль над ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей R . Введем направленность на множестве $\Sigma(S)$ всех разбиений единицы булевой алгебры S по формуле

$$\lambda < \mu \Leftrightarrow \forall x \in \mu \exists y \in \lambda \quad x \wedge y = x, \quad \forall \lambda, \mu \in \Sigma(S).$$

Для любых двух $\lambda, \mu \in \Sigma(S)$, $\lambda < \mu$ определим $\kappa_\mu^\lambda: G^\lambda \rightarrow G^\mu$ формулой

$$(\kappa_\mu^\lambda c)(x) = c(y), \quad \forall x \in \mu, \quad \forall y \in \lambda, \quad x \wedge y = x, \quad \forall c \in G^\lambda.$$

Очевидно, что $\forall \lambda < \mu < \nu \quad \kappa_\nu^\lambda = \kappa_\nu^\mu \circ \kappa_\mu^\lambda$, κ_λ^λ есть id_{G^λ} — тождественный автоморфизм R -модуля G и, следовательно, семейство $\{G^\lambda\}_{\lambda \in \Sigma(S)}$ образует прямой спектр R -модулей. Предел $\lim G^\lambda$ этого прямого спектра называется булевой S -степенью R -модуля G и обозначается через G^S . Элементы $c \in G^S$ называются булевыми цепями с коэффициентами из модуля G .

Для каждой булевой цепи $c \in G^S$, $c \in G^\lambda$, $\lambda \in \Sigma(S)$ и элемента $a \in S$ булева цепь $\tilde{c}/a \in G^{S_a}$, определяемая формулой $(\tilde{c}/a)(x \wedge a) = c(x)$, $\forall x \in \lambda$, $x \wedge a \neq 0$, называется релятивизацией булевой цепи $\tilde{c}$ к элементу $a \in S$.

Пусть теперь S — булева алгебра с замыканием и G — произвольный R -модуль.

Пусть $a \in S$ — элемент булевой алгебры. Две булевы цепи $f, g \in G^S$ называются эквивалентными, если существует некоторая окрестность $u \in S$ элемента a , что релятивизации f/u , g/u этих цепей к булевой алгебре $S_u = S \wedge u$ совпадают: $f/u = g/u$. Очевидно, что это отношение есть отношение эквивалентности на множестве G^S . Более того, класс булевых цепей, эквивалентных нулевой булевой цепи, образует подмодуль O_a модуля G^S , и поэтому фактор-множество $G^S / \sim$ по отношению эквивалентности булевых цепей совпадает с фактор-модулем G^S / O_a .

Определение 1. Каждый элемент R -модуля G^S / O_a называется ростком булевых цепей на элементе a и обозначается символом $\Gamma(a, G)$.

Пусть F — фильтр булевой алгебры S . Введем отношение F -эквивалентности булевых цепей на S со значениями в R -модуле G .

Определение 2. Булевы цепи $f, g \in G^S$ называются F -эквивалентными, если существует открытый элемент $u \in F$ такой, что $f/u = g/u$.

Это отношение является отношением эквивалентности на модуле G^S булевых цепей, и фактор-множество множества G^S по этому отношению F -эквивалентности совпадает с фактор-модулем G^S / O_F модуля G^S по его подмодулю O_F , образованному F -эквивалентными нулю булевыми цепями.

Определение 3. Элемент модуля G^S / O_F называется ростком булевых цепей в фильтре F .

Рассмотрим прямой спектр булеанов $\{2^{\lambda q}\}_{\lambda \in \Sigma(S)}$. Предел этого прямого спектра $\lim_{\lambda \in \Sigma(S)} 2^{\lambda q}$ называется полигональной q' -степенью булевой алгебры S . Обозначим через $S^{s, q}$ полигональную q -степень булевой алгебры S .

Определение 4. q -Цепи $f, g \in G^{s, q}$ называются локально-эквивалентными, или эквивалентными по Колмогорову, если существует открытое покрытие σ единицы 1_s булевой алгебры S такое, что $\forall a \in \sigma$ релятивизации $f/a, g/a$ цепей f и g к булевой алгебре $S_a^{s, q}$ равны: $f/a = g/a$.

Обозначим через O класс локально-эквивалентных нулю q -цепей над булевой алгеброй S . Фактор-модуль $G^{s, q}/O$ модуля $G^{s, q}$ по модулю O совпадает с фактор-множеством множества q -цепей по отношению эквивалентности булевых цепей по Колмогорову.

Положим

$$\Delta_\lambda = \bigvee \left\{ \underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_{q \text{ раз}} \mid x \in \lambda \right\}.$$

Ясно, что $\Delta_\lambda \in S^{s, q}$ и $\Delta_\lambda \wedge \Delta_\mu = \Delta_{\lambda \wedge \mu}$, где $\lambda \wedge \mu = \{x \wedge y \mid x \in \lambda, y \in \mu\}$.

Определение 5. Фильтр, порожденный множеством $\{\Delta_\lambda \mid \lambda \in \Sigma(S)\}$, называется диагональю булевой алгебры S и обозначается символом $\Delta(S)$.

Лемма 1. $G^{s, q}/O$ изоморфен с модулем ростков q -цепей над булевой алгеброй с замыканием на диагонали булевой алгебры $\Delta(S)$:

$$G^{s, q}/O \approx G^{s, q}/O_{\Delta(S)}.$$

Обозначим через $\tilde{G}^{s, q}$ модуль ростков булевых цепей.

Когомологии Колмогорова мы определим на категории $\mathcal{B}_{LC}$, являющейся подкатегорией категории всех булевых алгебр с замыканием и с идеалом. Пусть $a \in S$ и S — булева алгебра с замыканием.

Определение 6. Элемент a называется ограниченным, если его замыкание $\bar{a}$ компактно. Элемент a называется коограниченным, если его дополнение $C(a)$ ограничено. Элемент, являющийся ограниченным либо коограниченным, называется разрешимым.

Обозначим множество всех разрешимых элементов булевой алгебры S с замыканием через $D(S)$. Ясно, что замыкание разрешимого элемента разрешимо.

Лемма 2. $D(S)$ является подалгеброй булевой алгебры S с замыканием.

Определение 7. Непрерывный гомоморфизм $h: S \rightarrow S'$ булевых алгебр с замыканием называется допустимым, если он переводит ограниченные элементы в ограниченные.

Определение 8. Идеал I булевой алгебры S с замыканием называется допустимым, если канонический непрерывный гомоморфизм $i: S \rightarrow S/I$ булевой алгебры в свою фактор-алгебру является допустимым.

Определение 9. Булева алгебра S с замыканием называется локально-компактной, если для любого ограниченного элемента a существует ограниченный открытый элемент u такой, что $a \leq u$.

В дальнейшем булева алгебра S с замыканием предполагается локально-компактной.

Пара (S, I) называется допустимой, если I является допустимым идеалом булевой алгебры с замыканием S .

Так как композиция двух допустимых гомоморфизмов является допустимой, все допустимые пары (S, I) и их допустимые гомоморфизмы образуют категорию; эту категорию мы обозначим через $\mathcal{B}_{LC}$.

Рассмотрим направленное множество $\Sigma_0(D(S))$ всех конечных разбиений единицы булевой алгебры $D(S)$. Условимся единственный неограниченный коограниченный элемент разбиения единицы $\lambda \in \Sigma_0(D(S))$ обозначать через ∞_λ .

Для каждого $\lambda \in \Sigma_0(D(S))$ через G_0^λ обозначим подмодуль R -модуля G^λ , образованной булевыми цепями $c \in G^\lambda$, равными нулю в ∞_λ : $c(\infty_\lambda) = 0 \in G^\lambda$.

Рассмотрим прямой спектр R -модулей $\{G_0^\lambda\}_{\lambda \in \Sigma_0(D(S))}$ и образуем предел этого прямого спектра $\varinjlim G_0^\lambda = G_0^{D(S)}$.

Пусть теперь q — натуральное число, $q \geq 1$. Для каждого $\lambda \in \Sigma_0(D(S))$ определим R -модуль $G_0^{\lambda^q}$ как подмодуль модуля G^{λ^q} , образованный булевыми цепями $c \in G^{\lambda^q}$, удовлетворяющими условию: $c(x_0, \dots, x_q) = 0$, если для некоторого $0 \leq i \leq q$, $x_i = \infty_\lambda$.

Тогда мы получаем прямой спектр $\{G_0^{\lambda^q}\}_{\lambda \in \Sigma_0(D(S))}$ R -модулей; обозначим предел этого спектра через $G_0^{D(S), q}$.

Определение 10. Росток $c^q \in G_0^{D(S), q} / \mathcal{O}_{\Delta(D(S))}$ булевых цепей R -модуля на булевой алгебре с замыканием $D(S)$ называется q -коцепью Колмогорова.

Таким образом, R -модуль q -коцепей Колмогорова есть R -модуль $\tilde{c}^q(S) = G_0^{D(S), q} / \mathcal{O}_{\Delta(D(S))}$.

Ограниченный гомоморфизм $\delta^q: \tilde{c}^q(S) \rightarrow \tilde{c}^{q+1}(S)$ определяется следующим образом: $\delta^q = \{\delta_\lambda^q\}_{\lambda \in \Sigma(S)}$, $\forall c^q \in G^{\lambda^q}$, $q = \{0, \dots, q\}$,

$$(\delta_\lambda^q c^q)(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i c^q(x^{\hat{i}}) & \forall x \in (\lambda \wedge u)^{q+1}, \\ 0, & \text{если } x \in (\lambda \wedge C(u))^{q+1}; \end{cases}$$

здесь u является ограниченным открытым элементом, покрывающим $c(\infty_\lambda)$, $x^{\hat{i}} = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{q+1})$.

Из определения ясно, что $\delta_\lambda^q c^q$ является цепью над разбиением $\mu = \{x \wedge u \mid x \in \lambda\} \cup \{C(u)\}$, причем $\infty_\mu = C(u)$ и $(\delta_\lambda^q c^q)(\infty_\mu) = 0$.

Пусть теперь $h: S \rightarrow S'$ — допустимый гомоморфизм, т. е. $h \in \mathcal{B}_{LC}$. Для каждого $\lambda \in \Sigma_0(D(S))$ $h(\lambda) \in \Sigma_0(D(S'))$, причем $\infty_\mu = h(\infty_\lambda)$, где $\mu = h(\lambda)$. Поэтому определен индуцированный коцепный морфизм $h^*: C^*(S) \rightarrow C^*(S')$, причем $(h_2 \circ h_1)^* = h_2^* \circ h_1^*$, id_S^* есть тождественный морфизм.

Лемма 3. Соответствие $S \mapsto C^*(S)$, $h \mapsto h^*$ является ковариантным функтором из категории $\mathcal{B}_{LC}$ булевых алгебр с замыканием в категорию коцепных комплексов.

Для любой допустимой пары (S, I) эпиморфизм $i: S \rightarrow S/I$ допустим и поэтому индуцирует коцепный гомоморфизм $i^*: C^*(S) \rightarrow C^*(S/I)$. Введем $C^*(S, I) = \text{Ker } i^*$ и рассмотрим канонический гомоморфизм $j^*: C^*(S, I) \rightarrow C^*(S)$. Сопоставим паре (S, I) короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \rightarrow C^*(S, I) \xrightarrow{j^*} C^*(S) \xrightarrow{i^*} C^*(S/I) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Категория $\mathcal{B}_{LC}$ с классом отмеченных пар морфизмов (j^*, i^*) является c -категорией ⁽⁵⁾.

Пусть теперь $h: (S, I) \rightarrow (S', I')$ — некоторый морфизм пар. Непосредственно доказывается коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C^*(S, I) & \xrightarrow{j^*} & C^*(S) & \xrightarrow{i^*} & C^*(S/I) \rightarrow 0 \\ & & (h_I)^* \downarrow & & k^* \downarrow & & (h/I)^* \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C^*(S', I') & \xrightarrow{j^*} & C^*(S') & \xrightarrow{i^*} & C^*(S'/I') \rightarrow 0. \end{array}$$

Лемма 4. Правило, сопоставляющее каждой допустимой паре (S, I) ее короткую точную последовательность (1) коцепных комплексов и допустимому морфизму $h: (S, I) \rightarrow (S', I')$ индуцированный морфизм h^{**} коротких точных последовательностей коцепных комплексов, является ковари-

антным функтором, действующим из категории $\mathcal{B}_{LC}$ пар (S, I) в категорию коротких точных последовательностей коцепных комплексов.

Сопоставим каждой короткой точной последовательности (1) коцепных комплексов ее точную гомологическую последовательность

$$\dots \rightarrow H^q(S, I) \xrightarrow{f^*} H^q(S) \xrightarrow{i^*} H^q(S/I) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(S, I) \rightarrow \dots \quad (2)$$

Теорема 1. Для каждого морфизма $h: (S, I) \rightarrow (S', I')$ категории $\mathcal{B}_{LC}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H^q(S, I) & \xrightarrow{f^*} & H^q(S) & \xrightarrow{i^*} & H^q(S/I) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(S, I) \rightarrow \dots \\ (h_I)^* \downarrow & & h^* \downarrow & & (h/I)^* \downarrow & & (h_I)^* \downarrow \\ \dots \rightarrow H^q(S', I') & \rightarrow & H^q(S') & \rightarrow & H^q(S'/I') & \xrightarrow{\delta'} & H^{q+1}(S', I') \rightarrow \dots \end{array} \quad (3)$$

Таким образом, мы имеем ковариантный функтор, действующий из категории пар (S, I) в категорию прямых точных последовательностей. Эта теория когомологий называется теорией когомологий Колмогорова, а модуль $H^q(S, I)$ — q -мерным модулем когомологий булевой алгебры S по идеалу I с коэффициентами из модуля G .

Теорема 2 (аксиома размерности). Для простой булевой алгебры $S = \{0, 1\}$ имеет место изоморфизм

$$H^q(S) \approx \begin{cases} G, & \text{если } q=0, \\ 0, & \text{если } q \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что иногда удобно коцепной комплекс $C^*(S, I)$ обозначить через $C^*(S, F)$, где F — фильтр, дуальный к идеалу I , т. е. $F = \{C(x) \mid x \in I\}$. Тогда аксиома вырезания приобретает следующую форму:

$$i^*: H^*(S, F) \approx H^*(S/J, F/J), \quad (4)$$

где J — идеал булевой алгебры S , $i: (S, I) \rightarrow (S/J, I/J)$.

Для главного фильтра $F(a)$, порожденного элементом $a \in S$, градуированный R -модуль $H^*(S, F)$ условимся обозначать через $H^*(S, a)$.

Теорема 3 (аксиома вырезания). Пусть $u, a \in S$ — такие элементы, что u открыт и для некоторого открытого элемента v выполнено соотношение $\bar{u} \leq v \leq a$.

Тогда, если морфизм $h: (S, a) \rightarrow (S_{C(u)}, a \wedge C(u))$ допустим, то он индуцирует гомоморфизм h^* групп когомологий:

$$h^*: H^*(S, a) \approx H^*(S_{C(u)}, a \wedge C(u)).$$

Автор благодарит В. Г. Болтянского за ценные советы и обсуждения полученных результатов.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
23 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Б. Балавадзе, Сб. работ по теории гомологий, Тр. Тбилисского матем. ин-та им. А. М. Размадзе, т. 41, 1973, стр. 5. ² М. Р. Бунятов, Булева степень топологического пространства, Докл. АН АзербССР, т. 19, № 9, 8 (1973). ³ А. Н. Колмогоров, С. Р., в. 202, 1144, 1325, 1558, 1641 (1936). ⁴ Р. Сикорский, Булевы алгебры, М., «Мир», 1969. ⁵ Э. Спеньер, Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971. ⁶ Н. Стинрод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, М., 1958.