

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17 IV 1975)

1. Сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений вида

$$\mu dz/dt = F(z, t, \mu), \quad (1)$$

где z — M -мерный вектор, $\mu > 0$ — малый параметр, а уравнение $F(z, t, 0) = 0$, получающееся из (1) при $\mu = 0$ и называемое вырожденным, однозначно разрешимо относительно z , в настоящее время достаточно хорошо изучены (см., например, (1)). Однако в приложениях нередко встречаются случаи, когда вырожденное уравнение имеет семейство решений. Такого рода случаи характерны, например, для задач химической кинетики (2, 3).

2. Рассмотрим систему вида (z, F, f) — M -мерные вектор-функции

$$\mu dz/dt = F(z, t) + \mu f(z, t). \quad (2)$$

Сделаем следующие предположения (будем нумеровать их 1°, 2°, ...):
1°) $F(z, t)$, $f(z, t)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой области $D = \{(z, t): \|z\| \leq K, 0 \leq t \leq T\}$.

Будем пользоваться блочной записью для матрицы $F_z = \partial F / \partial z$ и для вектора z (а также для других встречающихся ниже векторов и матриц):

$$F_z = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

где F_{11} , F_{12} , F_{21} , F_{22} — матрицы (блоки) размеров $k \times k$, $k \times (M-k)$, $(M-k) \times k$, $(M-k) \times (M-k)$ соответственно, z_1 и z_2 — столбцы из k и $M-k$ компонент.

2°) $\text{rang } F_z = k$ и $\text{Det } F_{11} \neq 0$ в области D . Тогда, как известно, имеет место зависимость

$$F_2 = F_2(F_1, t), \quad (4)$$

куда t входит как параметр.

3°) $F_2(0, t) = 0$.

Из 2°) следует, что матрица F_z имеет характеристическое число $\lambda = 0$ кратности не менее $M-k$.

4°) Кратность характеристического числа $\lambda = 0$ матрицы F_z равна $M-k$.

В этом случае $\lambda = 0$ отвечает полное число (т. е. $M-k$) собственных векторов: $z_1 = -(F_{11})^{-1} F_{12} z_2$, z_2 — столбцы единичной матрицы E_{M-k} порядка $M-k$, $i = 1, \dots, M-k$.

5°) В области D уравнение $F_1(z, t) = 0$ разрешимо относительно z_1 : $z_1 = \varphi_1(z_2, t)$.

В силу (4) из 3°) $z_1 = \varphi_1(z_2, t)$ удовлетворяет также уравнению $F_2(z, t) = 0$. Таким образом, вырожденное уравнение $F(z, t) = 0$, получающееся из 2 при $\mu = 0$, имеет решение

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(z_2, t) \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где z_2 произвольно.

Поставим для системы (2) начальные условия

$$z|_{t=0} = z^0. \quad (6)$$

Вопрос, подлежащий выяснению, заключается в следующем: при каких требованиях будет существовать на $[0, 1]$ решение задачи (2), (6), стремящееся при $\mu \rightarrow 0$ к одному из решений множества (5).

3. Введем вспомогательную систему

$$dz/d\tau = F(z^* + z, t^*), \quad (7)$$

где $(z^*, t^*) \in D^*$ — параметр, D^* — подобласть (5) области D . $z=0$ является точкой покоя системы (7); характеристическое уравнение, отвечающее этой точке покоя, имеет, согласно 4⁰), корень $\lambda=0$ кратности $M-k$.

6⁰) Отличные от нуля характеристические числа λ матрицы F_z удовлетворяют в области D условию $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Лемма 1. В достаточно малой ω -окрестности точки $z=0$ существует k -мерное многообразие $\omega^+(z^*, t^*)$ такое, что если начальная точка $z^0 \in \omega^+$, то соответствующее ей решение $z(\tau)$ системы (7) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, причем $\|z(\tau)\| < ce^{-\kappa\tau}$, $\kappa > 0$, $c > 0$ — постоянные, не зависящие от (z^*, t^*) .

Обозначим через $B(z^*, t^*)$ матрицу такую, что

$$B^{-1}F_z(z^*, t^*)B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица C имеет характеристические числа, совпадающие с отличными от нуля характеристическими числами матрицы $F_z(z^*, t^*)$, удовлетворяющими условию 6⁰). (По поводу существования матрицы B , имеющей ту же степень гладкости, что и $F_z(z^*, t^*)$, см., например, (4).)

7⁰) $\operatorname{Det} B_{11} \neq 0$ при $(z^*, t^*) \in D^*$.

Лемма 1 является утверждением локального типа. Продолжая в сторону $\tau < 0$ траектории, начинающиеся в ω^+ , можно построить многообразие $\Omega^+(z^*, t^*)$, на котором $\|z\|$, вообще говоря, уже не мала, обладающее тем же свойством, что и ω^+ . Вопрос о глобальной структуре Ω^+ в общем виде не рассматривается (аналогичное положение имеет место для так называемой области влияния в случае, когда $\lambda=0$ отсутствуют, см. (4)). Для некоторых конкретных классов уравнений Ω^+ удается построить (см., например, (5)). В рассматриваемом случае системы общего вида (7) примем в качестве предположения

8⁰) $\Omega^+(z^*, t^*)$ в некоторой области G^+ изменения z_1^0 существует и представимо в виде $z_2^0 = \Phi(z_1^0, z^*, t^*)$, где Φ — непрерывная по совокупности переменных функция, имеющая непрерывные производные $\partial\Phi/\partial z_1^0 = H(z_1^0, z^*, t^*)$, $\partial\Phi/\partial z^*$.

Заметим, что $H(0, z^*, t^*) = B_{21}(B_{11})^{-1}$.

4. Обратимся к исследованию асимптотики решения задачи (2), (6). Произведем некоторые формальные построения. Будем искать решение задачи (2), (6) в виде

$$z = \bar{z} + \Pi z; \quad (8)$$

$$\bar{z} = \bar{z}_0(t) + \mu \bar{z}_1(t) + \dots, \quad (9')$$

$$\Pi z = \Pi_0 z(\tau) + \mu \Pi_1 z(\tau) + \dots, \quad \tau = t/\mu; \quad (9'')$$

(9') и (9'') — соответственно регулярный и пограничный ряд (см. (4)).

Согласно (4), $\bar{z}_0(t)$ определяется из уравнения $F(\bar{z}_0, t) = 0$. В качестве решения этого уравнения возьмем (см. (5))

$$\bar{z}_0(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{z}_{02}(t), t) \\ \bar{z}_{02}(t) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\bar{z}_{02}(t)$ — пока произвольная функция t .

Для определения $\Pi_0 z$ имеем

$$\frac{d}{d\tau} \Pi_0 z = F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0); \quad (11)$$

$$\Pi_0 z|_{\tau=0} = z^0 - \bar{z}_0(0); \quad (12')$$

$$\Pi_0 z|_{\tau=\infty} = 0; \quad (12'')$$

здесь $\bar{z}_{02}(0)$ — пока не известный параметр. Из условия (12'') получаем условие $\Pi_0 z|_{\tau=0} \in \Omega^+(\bar{z}_0(0), 0)$, а из (12') имеем

$$z_2^0 - \bar{z}_{02}(0) = \Phi(z_1^0 - \varphi_1(\bar{z}_{02}(0), 0), \bar{z}_0(0), 0); \quad (13)$$

это система $M-k$ уравнений с $M-k$ неизвестными $\bar{z}_{02}(0)$.

9°) Система (13) однозначно разрешима относительно $\bar{z}_{02}(0)$, причем $(\bar{z}_0(0), 0) \in D^*$, $z_1^0 - \varphi(\bar{z}_{02}(0), 0) \in G^+$.

Определив $\bar{z}_{02}(0)$, построим полностью $\Pi_0 z$ и будем иметь начальное значение для $\bar{z}_0(t)$. Уравнение для $\bar{z}_0(t)$ получим в следующем приближении. Согласно (1),

$$d\bar{z}_0/dt = F_z(\bar{z}_0(t), t)\bar{z}_1 + f(\bar{z}_0(t), t). \quad (14)$$

Пусть $\bar{z}^{(i)}(z^*, t^*)$, $i=1, \dots, M-k$, — собственные векторы матрицы, сопряженной к $F_z(z^*, t^*)$, отвечающие $\lambda=0$: $\bar{z}_1^{(i)} = -\bar{z}_2^{(i)} F_{z_1}^*(F_{11}^*)^{-1}$, звездочка означает транспонирование, $\bar{z}_2$ — строки единичной матрицы E_{M-k} . Тогда условия разрешимости (14) относительно $\bar{z}_1$ имеют вид

$$\bar{z}^{(i)}(\bar{z}_0(t), t, \varphi) = 0, \quad \varphi^{(1)}(\bar{z}_0(t), \bar{z}_0(t), t) = f(\bar{z}_0(t), t) - \dot{\bar{z}}_0(t), \quad i=1, \dots, M-k. \quad (15)$$

Это система $M-k$ дифференциальных уравнений для определения $M-k$ неизвестных $\bar{z}_{02}(t)$. Ее можно привести к разрешенному относительно

$\frac{d}{dt} \bar{z}_{02}(t)$ виду (см. (5)). Система (15) рассматривается при начальном условии

$$\bar{z}_{02}|_{t=0} = \bar{z}_{02}(0) \quad (16)$$

10°) Решение задачи (15) (16) определено на $0 \leq t \leq 1$ и $(z_0(t), t) \in D$.

Таким образом, построены нулевые члены разложений (9). Далее, $\bar{z}_1(t)$ определяется из (14) не полностью:

$$\bar{z}_{11} = -(F_{11})^{-1} F_{12} \bar{z}_{12} - (F_{11})^{-1} \varphi_1, \quad (17)$$

где $\bar{z}_{12}$ пока остается произвольной функцией t (ср. (10)).

Система уравнений и условий для определения $\Pi_1 z$ имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \Pi_1 z = F_z(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) (\Pi_1 z + \bar{z}_1(0)) + \varphi^{(1)}(0) + \psi^{(1)}(\tau), \quad (18)$$

$$\Pi_1 z|_{\tau=0} = -\bar{z}_1(0), \quad \Pi_1 z|_{\tau=\infty} = 0; \quad (19)$$

здесь $\bar{z}_{12}(0)$ — пока не известная константа, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(1)}(\dot{\bar{z}}_0(0), \bar{z}_0(0), 0)$ — известная константа, $\psi^{(1)}(\tau) = \Pi_0 F_z \cdot \dot{\bar{z}}_0(0) \cdot \tau + \Pi_0 F_1 \cdot \tau + \Pi_0 f$ — известная функция τ .

Как оказывается, требование на бесконечности (19) однозначно определяет $\bar{z}_{12}(0)$:

$$\bar{z}_{12}(0) = (1 - M\bar{F}_{12})^{(1)} J - M\varphi_1(0); \quad (20)$$

$$J = \int_0^\infty K(\tau, s) [\varphi_2^{(w)} + \psi_2^{(w)} - H(\varphi_1^{(w)} + \psi_1^{(w)})] ds, \quad (24)$$

$$H = H((\Pi_0 z)_1, \bar{z}_0(0), 0), \quad \bar{H} = H(0, \bar{z}_0(0), 0), \quad \bar{F}_{ik} = F_{ik}(\bar{z}_0(0), 0),$$

$M = \bar{H}(\bar{F}_{11} + \bar{F}_{12}\bar{H})^{-1}$; $K(\tau, s)$ — матрицант линейной системы с матрицей $F_{22}(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) - HF_{12}(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0)$.

Таким образом, полностью определяется $\Pi_0 z$ и начальное значение $\bar{z}_1(0)$. Само $\bar{z}_1(t)$ определится на следующем шаге.

Процесс можно продолжить. На каждом шаге нужны величины определяются из соотношений типа (14) — (21) совершенно аналогично тому, что имело место на первом шаге. При определении $\bar{z}_k$, $\Pi_k z$ в этих соотношениях меняются лишь величины, помеченные индексом (1) сверху, который заменяется на индекс (k).

5. Обозначим через $Z_n(t, \mu)$ частичную сумму ряда (8), содержащую члены до n -го порядка включительно. Введем кривую L_0 , состоящую из двух звеньев:

$$L_{01} = \{(z, t): z = \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau \geq 0), t = 0\}, \\ L_{02} = \{(z, t): z = \bar{z}_0(t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Теорема. При выполнении условий $1^0) - 10^0)$ найдутся постоянные $\mu_0 > 0$, $\delta > 0$, $c > 0$ такие, что при $0 < \mu \leq \mu_0$ в δ -трубке кривой L_0 существует единственное решение $z(t, \mu)$ задачи (2), (6) и имеет место неравенство

$$\|z(t, \mu) - Z_n(t, \mu)\| < c\mu^{n+1} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1. \quad (22)$$

Замечание. Для справедливости этого утверждения вместо $1^0)$ фактически требуется существование непрерывных производных от F и f до $n+3$ (соответственно $n+2$) порядка включительно в δ -трубке кривой L_0 .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Б. Васильева, В. Ф. Бугузов, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, «Наука», 1973. ² В. Н. Васильев, А. И. Вольперт, С. И. Худяев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 3 (1973). ³ Е. А. Нагнибеда, Вестн. ЛГУ, матем. мех. астр., в. 2 (1969). ⁴ Sibuya Yasutaka, Math. Ann., v. 161, 67 (1965). ⁵ В. Ф. Бугузов, А. Б. Васильева, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 4 (1970).