

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОПФА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО КВАЗИЛИНЕЙНОМУ ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 24 III 1975)

1. Для краткости ограничимся изложением результатов для случая квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Delta u(t, x) - \gamma^2 u(t, x) + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u^2(t, x)) + a u^2(t, x), \quad (1)$$

где $\gamma^2 > 0$; b_j, a — постоянные комплексные числа; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+^1 = \{t: t > 0\}$. Через $v(t, \xi)$ обозначим преобразование Фурье решения $u(t, x)$ по x -ам: $v(t, \xi) = F_{x \rightarrow \xi} u(t, x)$.

Применив оператор $F_{x \rightarrow \xi}$ к обеим частям (1), получим

$$\frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} = -A(\xi)v(t, \xi) + C(\xi) \cdot (v * v(t, \xi)), \quad (2)$$

$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$, $A(\xi) = |\xi|^2 + \gamma^2$, $C(\xi) = i \sum b_j \xi^j + a$, $v * v(t, \xi) = F_{x \rightarrow \xi} u^2(t, x)$ — свертка функции v и v по ξ .

Напомним, что подразумевается под статистическим решением системы (2). Допустим, что задача Коши для (2) однозначно разрешима, если начальное условие $v(\xi) = v(0, \xi)$ принадлежит банахову пространству B , причем решение $v(t, \cdot) = S_t v(\xi) \in B$ для любого $t > 0$. Пусть на борелевской алгебре множеств пространства B задана σ -аддитивная мера $\mu_0(\omega)$. Под статистическим решением (2) понимается мера $\mu_t(\omega) = \mu_0(S_t^{-1}\omega)$, где

$$S_t^{-1}\omega = \{v \in B: S_t v \in \omega\}. \quad (3)$$

Пусть $\chi(t, w)$ — характеристический функционал меры $\mu_t(\omega)$,

$$\chi(t, w) = \int_B e^{i(v, w)} \mu_t(dv) = \int_B e^{i(S_t v, w)} \mu_0(dv), \quad (4)$$

$$(v, w) = \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi) \cdot w(\xi) d\xi,$$

$w(\xi)$ принадлежит пространству B_1 , двойственному к B . (Ниже $B = L_1(\mathbb{R}^n)$, $B_1 = B^* = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ или $B_1 = C_b(\mathbb{R}^n)$.) Дифференцируя обе части (4) по t и выражая $\partial S_t v / \partial t$ через правую часть (2), получим для $\chi(t, w)$ следующее уравнение в вариационных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(t, w)}{\partial t} = & - \int_{\mathbb{R}^n} w(\xi) \cdot A(\xi) \frac{\delta \chi(t, w)}{\delta w(\xi)} d\xi + \\ & + \frac{1}{i} \left(w(\xi), C(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta}{\delta w(\xi - \eta)} \frac{\delta}{\delta w(\eta)} \chi(t, w) d\eta \right) \end{aligned} \quad (5)$$

(см., например, ^(1, 2) и работы Ю. Л. Далецкого). Оно называется уравнением Хопфа, соответствующим уравнению (2).

Ниже изучается задача Коши для уравнения (5) при начальном условии

$$\chi|_{t=0} = \chi_0(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{(\mathbf{R}^n)^k} f_{k0}(\xi_1, \dots, \xi_k) w(\xi_1) \dots w(\xi_k) d\xi_1 \dots d\xi_k, \quad (6)$$

являющемся целым аналитическим функционалом по $w(\xi) \in L_{\infty}(\mathbf{R}^n)$; $(\mathbf{R}^n)^k = \mathbf{R}_{\xi_1}^n \times \dots \times \mathbf{R}_{\xi_k}^n$; $f_{k0}(\xi_1, \dots, \xi_k) \in L_1((\mathbf{R}^n)^k)$.

Решение задачи (5), (6) ищется в классе целых аналитических функционалов вида

$$\chi(t, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{(\mathbf{R}^n)^k} f_k(t, \xi_1, \dots, \xi_k) w(\xi_1) \dots w(\xi_k) d\xi_1 \dots d\xi_k, \quad (7)$$

где $f_k(t, \xi_1, \dots, \xi_k) \in L_1((\mathbf{R}^n)^k)$ для любого $t \in \mathbf{R}_+^1$. Отметим, что при решении задачи (5), (6) не предполагается ни существование оператора S_t , ни представимость решения $\chi(t, w)$ в виде (4), где $\mu_t(dv)$ — мера.

Подставив ряд (7) в (5) и (6) и приравнявая члены одинакового порядка однородности, получим следующую систему уравнений для коэффициентов $f_k(t, \xi^{(k)})$:

$$\begin{aligned} \frac{df_k(t, \xi^{(k)})}{dt} = & -A_k(\xi^{(k)}) f_k(t, \xi^{(k)}) + \\ & + k S_k \left(C(\xi_1) \int f_{k+1}(t, \xi_1 - \eta, \eta, \xi_2, \dots, \xi_k) d\eta \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $S_k \Phi(\xi_1, \dots, \xi_k)$ — симметризация функции Φ по переменным $\xi_1, \dots, \xi_k$; $A_k(\xi^{(k)}) = A(\xi_1) + \dots + A(\xi_k)$;

$$f_k|_{t=0} = f_{k0}(\xi^{(k)}), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Отметим, что при $k=0$ уравнение (8) сводится к $df_0(t)/dt=0$, следовательно, $f_0(t) = f_{00} = \text{const}$, $t > 0$.

2. Умножим уравнение (8) на $g_k(t, \xi^{(k)})$, $g_k|_{t=\infty}=0$, проинтегрируем по области $\mathbf{R}_+^{(k)} = \mathbf{R}_+^1(t) \times (\mathbf{R}^n)^k$, просуммируем по k от 1 до ∞ и перебросим все операторы с множителей $f_k(t, \xi^{(k)})$ на $g_k(t, \xi^{(k)})$. Тогда, предполагая, что все произведенные операции законны, получим

$$0 = - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\mathbf{R}^n)^k} f_k(0, \xi^{(k)}) g_k(0, \xi^{(k)}) d\xi^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \iint_{\mathbf{R}_+^{(k)}} f_k(t, \xi^{(k)}) (L^* \bar{g})_k dt d\xi^{(k)}, \quad (10)$$

где

$$L^* \bar{g} = ((L^* \bar{g})_1, \dots, (L^* \bar{g})_k, \dots), \quad \bar{g} = (g_1(t, \xi^{(1)}), \dots, g_k(t, \xi^{(k)}), \dots),$$

$$\begin{aligned} (L^* \bar{g})_k = & - \frac{d g_k(t, \xi^{(k)})}{dt} + A(\xi^{(k)}) g_k(t, \xi^{(k)}) - \\ & - (k-1) S_k (C(\xi_1 + \xi_2) g_{k-1}(t, \xi_1 + \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k)). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10), (11) следует, что сопряженная к (8), (9) неоднородная система имеет вид:

$$L^* \bar{g} = \bar{h} \quad (\text{или } (L^* \bar{g})_k = h_k(t, \xi^{(k)})), \quad \bar{g}|_{t=\infty} = 0, \quad (12)$$

$\bar{h} = (h_1(t, \xi^{(1)}), \dots, h_k(t, \xi^{(k)}), \dots)$. Согласно (11) в системе (12) k -е уравнение выражает k -ю компоненту g_k через $(k-1)$ -ю g_{k-1} , поэтому из (12) g_k однозначно выражается через $h_j(t, \xi^{(j)})$, $j=1, 2, \dots, k$.

Пусть $Y=Y_m$ — банахово пространство вектор-функций $\bar{h}=(h_1(t, \xi^{(1)}), \dots, h_k(t, \xi^{(k)}), \dots)$, где $h_k(t, \xi^{(k)})$ — комплекснозначные, непрерывные, симметрические по $\xi_j, j=1, \dots, k$, ограниченные на $R_+^{(k)}$ функции, причем

$$\|\bar{h}\| = \sum_{k=1}^{\infty} m^k \| (A(\xi^{(k)}))^{-1} h_k(t, \xi^{(k)}) \|, \quad \|\varphi_k(t, \xi^{(k)})\| = \sup_{(k)} \|\varphi_k(t, \xi^{(k)})\|, \quad (13)$$

где $m>0$ — фиксированное число. Пусть G — оператор, сопоставляющий правой части $\bar{h} \in Y_m$ уравнения (12) значение соответствующего решения $\bar{g}=(g_1, \dots, g_k, \dots)$ задачи (12) при $t=0$:

$$G\bar{h}=\bar{g}_0, \quad \bar{g}_0=(g_{10}(\xi^{(1)}), \dots, g_{k0}(\xi^{(k)}), \dots), \quad g_{k0}=g_k|_{t=0}=(G\bar{h})_k. \quad (14)$$

Введем пространство $X_0=X_{0m}$ вектор-функций $\bar{g}_0=(g_{10}(\xi^{(1)}), \dots, g_{k0}(\xi^{(k)}), \dots)$, компоненты которых g_{k0} симметричны относительно своих аргументов $(\xi_1, \dots, \xi_k)=\xi^{(k)}$ и для которых

$$\|\bar{g}_0\| = \sup_k m^k \|g_{k0}(\xi^{(k)})\| < +\infty, \quad \|\psi(\xi^{(k)})\| = \sup_{\xi^{(k)}} |\psi(\xi^{(k)})|. \quad (15)$$

Теорема 1. Если m достаточно мало, то оператор G непрерывно отображает Y_m в X_{0m} , причем справедлива оценка

$$\|G\bar{h}\| = \|\bar{g}_0\| \leq \|\bar{h}\|, \quad \forall \bar{h} \in Y_m, \quad \bar{g}_0 \in X_{0m}. \quad (16)$$

В доказательстве применяются оценки, аналогичные тем, которые приведены в (5, 6).

Лемма 1. Сопряженное пространство Y_m^* к Y_m можно реализовать в виде пространства, элементами которого являются векторные аддитивные функции множеств $\bar{v}=(v_1, \dots, v_k, \dots)$, где $v_k=v_k(\omega_k)$, ω_k — борелевское множество в $R_+^{(k)}$, причем $v_k(\omega_k)$ — регулярная, аддитивная, ограниченной вариации комплекснозначная функция множеств на $R_+^{(k)}$ ($v_k \in \text{rab}(R_+^{(k)})$) в обозначениях (3)). При этом

$$\|\bar{v}\|_{Y_m^*} = \sup_k m^{-k} \|A(\xi^{(k)}) v_k\|_1, \quad \|A(\xi^{(k)}) v_k\|_1 = \int_{R_+^{(k)}} A(\xi^{(k)}) v_k(dt, d\xi^{(k)}). \quad (17)$$

Лемма 2. Пространство X_{0m}^* , сопряженное к X_{0m} , содержит подпространство X_{0m}^{**} : $X_{0m}^{**} \subset X_{0m}^*$, которое можно реализовать в виде пространства векторных аддитивных функций множеств $\bar{v}_0=(v_{10}, \dots, v_{k0}, \dots)$, где $v_{k0}(d\xi^{(k)}) \in \text{rab}(R_{\xi^{(k)}}^{(k)})$, причем

$$\|\bar{v}_0\|_{X_{0m}^*} = \sum_{k=1}^{\infty} m^{-k} \|v_{k0}\|_1, \quad \|v_{k0}\|_1 = \int |v_{k0}(d\xi^{(k)})|. \quad (18)$$

Определение. Векторная аддитивная функция множеств $\bar{v}=(v_1, \dots, v_k, \dots)$, принадлежащая Y_m^* , где m такое же, как в теореме 1, называется обобщенным решением из Y_m^* системы (8) при начальных условиях

$$\bar{v}|_{t=0}=\bar{v}_0=(v_{10}, \dots, v_{k0}, \dots) \in X_{0m}^{**}, \quad (19)$$

если для любого $\bar{h} \in Y_m$ выполнено соотношение

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(R^n)^k} (G\bar{h})_k v_{k0}(d\xi^{(k)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{R_+^{(k)}} h_k(t, \xi^{(k)}) v_k(dt, d\xi^{(k)}) = 0. \quad (20)$$

Отметим, что это соотношение получается из (10), если в нем $(L^* \bar{g})_k$ заменить на $h_k(t, \xi^{(k)})$, а $g_k(0, \xi^{(k)})$ на $g_{k0}(\xi^{(k)}) = (G\bar{h})_k = g_k(0, \xi^{(k)})$. При этом $f_k(t, \xi^{(k)}) dt d\xi^{(k)}$ и $f_k(0, \xi^{(k)}) d\xi^{(k)}$ заменены на аддитивные функции множеств $v_k(dt, d\xi^{(k)})$ и $v_{k0}(d\xi^{(k)})$.

Теорема 2. Для любого начального условия $\bar{v}_0 \in X_{0m}^{**}$ существует и притом единственное обобщенное решение $\bar{v} \in Y_m^*$ системы (8), причем справедлива оценка $\|\bar{v}\|_{Y_m^*} \leq \|\bar{v}_0\|_{X_{0m}^{**}}$.

Доказательство вытекает из определения (20) обобщенного решения $\bar{v}$, свойств оператора $G\bar{h}$ и лемм 1, 2.

Теорема 3. а) Пусть начальные условия $v_{k0}(d\xi^{(k)}) = f_{k0}(\xi^{(k)}) d\xi^{(k)}$ имеют плотности $f_{k0}(\xi^{(k)}) \in L_1((\mathbf{R}_+^n)^k)$, причем $\sum m^{-k} \|v_{k0}\|_1 = \|\bar{f}_0\|_1 < +\infty$, $\bar{f}_0 = (f_{10}, f_{20}, \dots)$. Тогда компоненты v_k обобщенного решения $\bar{v} = (v_1, \dots, v_k, \dots)$ имеют плотности $f_k(t, \xi^{(k)})$, причем $A(\xi^{(k)}) f(t, \xi^{(k)}) \in L_1(\mathbf{R}_+^{(k)})$. Имеет место оценка

$$\sup_k m^{-k} \|A(\xi^{(k)}) f(t, \xi^{(k)})\|_1 \leq \|\bar{f}_0\|_1.$$

Плотности $f_k(t, \xi^{(k)})$ удовлетворяют соотношению, аналогичному (20), и также называются обобщенным решением задачи (8), (9).

б) обобщенное решение $\bar{f} = \{f_k(t, \xi^{(k)})\}$ допускает обобщенную производную по t , причем $\partial f_k(t, \xi^{(k)}) / \partial t \in L_1(\mathbf{R}_+^{(k)})$. Все слагаемые уравнения (8) принадлежат пространству $L_1(\widehat{\mathbf{R}}_{(k)})$. Функции $f_k(t, \xi^{(k)})$, $f_{k+1}(t, \xi^{(k+1)})$ удовлетворяют каждому уравнению (8) почти всюду по $(t, \xi^{(k)})$ в $\mathbf{R}_+^{(k)}$, $k=1, 2, \dots$

3. Обобщенному решению $\bar{v} = \{v_k(dt, d\xi^{(k)})\}$ или обобщенному решению вида $\bar{f} = \{f_k(t, \xi^{(k)})\}$ системы (8) при начальных условиях (19) или (9) отвечает обобщенное решение $\chi(t, w)$ задачи Коши (5), (6) для уравнения Хопфа (5). По определению это соответствие в первом случае задается формулой

$$\chi(\omega, w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int w(\xi_1) \dots w(\xi_k) v_k(\omega, d\xi^{(k)}) + v_{00}, \quad w(\xi) \in C_b(\mathbf{R}^n),$$

где ω — любое борелевское множество на $\mathbf{R}_+^1(t)$, а во втором случае — с помощью формулы (7), в которой $w(\xi) \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 4. Обобщенные решения $\chi(\omega, w)$, соответственно $\chi(t, w)$, являются целыми аналитическими функциями относительно w , причем интеграл по t от χ оценивается через $C \exp(t\|w\|)$, где t такое же, как в теореме 1.

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 3, то обобщенное решение $\chi(t, w)$ задачи (5), (6) задается рядом (7), причем для любого $w(\xi) \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$ почти всюду по t существует производная $\partial \chi(t, w) / \partial t \in L_1(\mathbf{R}_+^1(t))$. Функционал $\chi(t, w)$ удовлетворяет для любого $w \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$ и почти всюду по t уравнению (5).

Коэффициенты $f_k(t, w)$ функционала χ обладают свойствами, указанными в теореме 3. Обобщенное решение $\chi(t, w)$ задачи Коши (5), (6) в таком классе целых аналитических функционалов единственно.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. Hopf, J. Rat. Mech. Anal., v. 1, 87 (1952). ² C. Foias, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, v. 48, 219 (1972). ³ Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы, ИЛ, М., 1962. ⁴ Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, ДАН, т. 205, № 4 (1972). ⁵ М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, Матем. сб., т. 92, № 3, 247 (1973). ⁶ М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, УМН, т. 29, в. 2, 123 (1974).