

С. М. ВОВСИ

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПРЕДМНОГООБРАЗИЯ И РАДИКАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 IV 1975)

Пусть K — произвольное, но фиксированное поле. Будем рассматривать пары (V, Γ) , где V — векторное пространство над K , а Γ — группа, для которой задано представление относительно V . Термины «пара» и «представление» здесь по существу являются синонимами. Говоря о классах таких пар — представлений, мы подразумеваем только абстрактные классы, т. е. такие, которые инвариантны относительно изоморфизмов и содержат все пары с нулевой областью действия.

1. Определения и обозначения. Через $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ обозначаются соответственно класс всех представлений и класс представлений с тождественным действием. Определим несколько операторов на классах представлений ⁽¹⁾. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс, тогда $S\mathfrak{X}$ есть класс всех подпар пар из $\mathfrak{X}$; $Q\mathfrak{X}$ — класс всех гомоморфных образов пар из $\mathfrak{X}$; $Q\cdot\mathfrak{X}$ — класс всех правых гомоморфных образов пар из $\mathfrak{X}$; $V\mathfrak{X}$ — класс всех пар, у которых некоторый правый гомоморфный образ содержится в $\mathfrak{X}$; $S\cdot\mathfrak{X}$ — класс всех пар, являющихся декартовыми произведениями $\mathfrak{X}$ -пар; $S\cdot\mathfrak{X}$ — класс всех правых декартовых произведений $\mathfrak{X}$ -пар (при этом пара (V, Γ) называется правым декартовым произведением пар $(V_\alpha, \Gamma_\alpha)$, если V есть прямая сумма всех V_α , Γ — декартово произведение всех Γ_α , а действие Γ в V определено покомпонентно).

Напомним, что многообразием называется класс пар, определяемый некоторым набором тождеств $x^*u(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$, где $u(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — элемент групповой алгебры KF абсолютно свободной группы F со свободными образующими $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$.

Класс пар называется насыщенным, если он замкнут относительно операторов V и Q . Класс пар называется предмногообразием, если он насыщен и замкнут относительно взятия подпар и декартовых произведений. Если $\mathfrak{X}$ — предмногообразие, а (V, Γ) — произвольное представление, то в V существует Γ -подпространство $A = \mathfrak{X}^*(V, \Gamma)$ такое, что $(V/A, \Gamma) \in \mathfrak{X}$ и A содержится в каждом Γ -пространстве из V с этим свойством.

Класс пар $\mathfrak{X}$ называется радикальным (точнее, наследственным радикальным ⁽¹⁾), если он насыщен, замкнут относительно взятия подпар и гомоморфных образов и если в каждой паре (V, Γ) существует $\mathfrak{X}$ -радикал — такое Γ -подпространство $A = \mathfrak{X}(V, \Gamma)$, что $(A, \Gamma) \in \mathfrak{X}$ и любое другое Γ — $\mathfrak{X}$ -подпространство из V содержится в A .

Если $\mathfrak{X}$ — произвольный класс пар, то через $\text{var } \mathfrak{X}$, $\text{pvar } \mathfrak{X}$ и $\text{rad } \mathfrak{X}$ обозначаются соответственно многообразие, предмногообразие и радикальный класс, порожденные классом $\mathfrak{X}$. Известно, что операторы var , pvar и rad выражаются следующими формулами:

$$\text{var} = \text{VQSC}, \text{pvar} = \text{VQ}_r\text{SC}, \text{rad} = \text{VQSC}_r. \quad (1)$$

Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — два класса пар. Их произведением $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ называется класс всех пар (V, Γ) таких, что в V существует Γ -подпространство A , для которого $(A, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1$ и $(V/A, \Gamma) \in \mathfrak{X}_2$. Это умножение является ассоциатив-

ным, причем системы всех многообразий, всех предмногообразий и всех радикальных классов замкнуты относительно него. Будем поэтому говорить о полугруппах многообразий, предмногообразий и радикальных классов, учитывая при этом, разумеется, что последние две «полугруппы» определены не на множестве элементов, а на классе.

2. Треугольные произведения. Если (A, Σ) и (B, Φ) — некоторые пары, то через $(A, \Sigma) \nabla (B, \Phi)$ обозначается их треугольное произведение в смысле ⁽²⁾. Аппарат треугольных произведений играет в дальнейшем основную роль.

Теорема 1. Если (A, Σ) и (B, Φ) — произвольные пары, то $\text{var}((A, \Sigma) \nabla (B, \Phi)) = \text{var}(A, \Sigma) \cdot \text{var}(B, \Phi)$.

Замечание. Как известно, треугольные произведения в вопросах, связанных с произведениями классов пар, играют роль, аналогичную роли сплетений при изучении произведений классов групп. Подчеркнем в связи с теоремой 1 и существенную разницу. А именно, если A и B — произвольные группы, а I — бесконечное множество, то $\text{var}(A \text{ wr } B^{(I)}) = \text{var } A \cdot \text{var } B$ ⁽³⁾. Однако, в отличие от теоремы 1, «убрать» показатель I здесь нельзя.

Теорема 1, положительно отвечая на один вопрос Б. И. Плоткина, усиливает некоторые утверждения из ⁽⁴⁾ и ⁽⁵⁾. Укажем некоторые непосредственные приложения этой теоремы. Так, пусть K^n — n -мерное пространство над K , $UT(n, K)$ — группа унитарных матриц порядка n над K , $(K^n, UT(n, K))$ — естественно возникающее представление. Легко понять, что

$$(K^n, UT(n, K)) = \underbrace{(K, E) \nabla (K, E) \nabla \dots \nabla (K, E)}_{n \text{ раз}}, \quad (2)$$

где (K, E) — одномерное представление единичной группы. Так как $\text{var}(K, E) = \mathbb{C}$, то из теоремы 1 и (2) получаем

Следствие 1. $\text{var}(K^n, UT(n, K)) = \mathbb{C}^n$.

Непосредственными вычислениями это следствие было доказано А. С. Гринбергом ⁽⁶⁾. Отметим, что как доказательство Гринберга, так и вышеприведенное доказательство остаются верными для произвольного коммутативного кольца с единицей K .

Укажем еще одно применение теоремы 1. Напомним, следуя ⁽⁵⁾, что если $\mathfrak{X}$ — многообразие пар, θ — многообразие групп, то $\mathfrak{X} \times \theta$ есть многообразие всех тех пар (V, Γ) , для которых в Γ существует нормальный делитель Σ такой, что $(V, \Sigma) \in \mathfrak{X}$ и $\Gamma/\Sigma \in \theta$. Пусть $T(n, K)$ — группа всех обратимых треугольных матриц порядка n над K , $(K^n, T(n, K))$ — естественная пара. Тогда

$$(K^n, T(n, K)) = \underbrace{(K, K^*) \nabla (K, K^*) \nabla \dots \nabla (K, K^*)}_{n \text{ раз}}, \quad (3)$$

где K^* — мультипликативная группа поля K , действующая в K понятным образом. Пусть теперь $m = |K^*|$ и пусть $\mathfrak{A}_m$ обозначает многообразие всех абелевых групп экспоненты m , если m конечно, и многообразие всех абелевых групп, если m бесконечно. Нетрудно проверить, что $\text{var}(K, K^*) = \mathbb{C} \times \mathfrak{A}_m$. Учитывая (3), по теореме 1 получаем $\text{var}(K^n, T(n, K)) = (\mathbb{C} \times \mathfrak{A}_m)^n$. Однако $(\mathbb{C} \times \mathfrak{A}_m)^n = \mathbb{C}^n \times \mathfrak{A}_m$ (см. ⁽⁵⁾), откуда имеем

Следствие 2. $\text{var}(K^n, T(n, K)) = \mathbb{C}^n \times \mathfrak{A}_m$.

Другими методами, причем при более общих предположениях относительно кольца K , это утверждение доказал Л. Е. Кроп.

Отметим, что с помощью следствия 2 легко описываются многообразия групп, порожденные группами $T(n, K)$ над произвольным полем K . Действительно, хорошо известно, что класс всех групп, допускающих точное n -стабильное представление над полем K , совпадает либо с классом $(n-1)$ -нильпотентных групп без кручения, если $\text{char } K = 0$, либо с так называемым

магнуссовым многообразием $\mathfrak{M}_{n-1, p}$, если $\text{char } K = p$. Используя следствие 2, имеем

Следствие 3. Пусть K — произвольное поле, тогда:

а) если $\text{char } K = 0$, то $\text{var } T(n, K) = \mathfrak{N}_{n-1, \mathbb{A}}$;

б) если $\text{char } K = p$, то $\text{var } T(n, K) = \mathfrak{M}_{n-1, p} \mathfrak{A}_m$.

Над бесконечным полем этот факт был доказан Н. С. Романовским (⁷).

Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — V -замкнутые классы пар (т. е. $V\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}_i$). Тогда их произведение $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ также является V -замкнутым, поэтому можно говорить о «полугруппе» V -замкнутых классов. С помощью теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Отображение $\mathfrak{X} \mapsto \text{var } \mathfrak{X}$ является гомоморфизмом полугруппы V -замкнутых классов пар на полугруппу многообразий.*

3. Полугруппы предмногообразий и радикальных классов. Полугруппа многообразий представлений содержится как в полугруппе предмногообразий, так и в полугруппе радикальных классов (более того, уже из (1) видно, что пересечение последних двух полугрупп есть в точности полугруппа многообразий). Параллельно известной теоретико-групповой теореме Нейманов — Шмелькина (^{8, 9}) Б. И. Плоткиным было доказано, что над любым полем полугруппа многообразий пар свободна (⁴). Естественно возникает вопрос, нельзя ли обобщить этот результат на более широкие полугруппы предмногообразий и радикальных классов пар? Ответ здесь, вообще говоря, отрицателен, в основном потому, что обе эти полугруппы не порождаются своими неразложимыми элементами.

Будем теперь рассматривать только такие предмногообразия (радикальные классы), которые раскладываются в произведение конечного числа неразложимых. Такие предмногообразия (радикальные классы) назовем вполне разложимыми.

Теорема 3. *Над любым полем полугруппа вполне разложимых предмногообразий пар свободна.*

Теорема 4. *Над любым полем полугруппа вполне разложимых радикальных классов пар свободна.*

В каждом из этих результатов в качестве частного случая содержится теорема о свободе полугруппы многообразий пар, так как по теореме 2 всякое неразложимое многообразие является неразложимым элементом и в полугруппе предмногообразий, и в полугруппе радикальных классов. Последнее утверждение, кстати, можно обобщить следующим образом:

Предложение. *Произведение конечного числа предмногообразий пар является собственным многообразием тогда и только тогда, когда все сомножители являются многообразиями.*

Аналогичное утверждение справедливо для радикальных классов.

В связи с теоремами 3 и 4 подчеркнем, что полугруппы вполне разложимых предмногообразий и радикалов существенно шире полугруппы многообразий. Действительно, элементы последней образуют множество, в то время как первые две полугруппы множествами не являются (см., например, (¹⁰)).

Укажем теперь некоторые интересные серии вполне разложимых предмногообразий и радикалов. Предмногообразие (радикальный класс) $\mathfrak{X}$ назовем ограниченным, если $\text{var } \mathfrak{X} \neq \mathfrak{D}$. Из теоремы 2 следует, что всякое ограниченное предмногообразие (радикальный класс) вполне разложимо. Предмногообразие назовем малым, если оно порождается некоторым множеством пар. Аналогично определяется малый радикальный класс. Известно, что все малые предмногообразия и радикалы неразложимы (^{2, 10}).

В (¹⁰) было доказано, что системы ограниченных и малых предмногообразий свободны. Ясно, что эти результаты содержатся в теореме 3.

Так как всякое многообразие представлений $\mathfrak{X}$ является радикальным классом, то в произвольной паре естественно строятся как нижний вербальный, так и верхний радикальный ряды по $\mathfrak{X}$. Можно доказать, что для всякого ординала α существует пара (V, Γ) , в которой верхний $\mathfrak{X}$ -ряд до-

ходит до V в точности через α шагов. Аналогичный факт имеет место для нижних $\aleph$ -рядов. Доказательство этих утверждений основано на тех же идеях, что и доказательство аналогичных результатов из теории групп (см. ^(11, 12)). Более интересна здесь следующая теорема, специфичная именно для многообразий пар.

Теорема 5. *Для любого многообразия пар $\aleph$ и любых бесконечных ординалов α и β существует пара (V, Γ) , у которой верхний $\aleph$ -ряд доходит до V через α шагов, а нижний $\aleph$ -ряд доходит до нуля через β шагов.*

Ясно, что условие бесконечности α и β является необходимым.

В заключение автор благодарит проф. Б. И. Плоткина за ряд полезных замечаний и внимание.

Рижский
политехнический институт

Поступило
26 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. И. Плоткин, Латв. матем. ежегодник, т. 10, 75 (1972). ² Б. И. Плоткин, Сб.: Некоторые вопросы теории групп, Рига, 1971, стр. 140. ³ Х. Нейман, Многообразия групп, М., «Наука», 1969. ⁴ Б. И. Плоткин, А. С. Гринберг, Сиб. матем. журн., т. 13, № 4, 841 (1972). ⁵ Б. И. Плоткин, Там же, т. 13, № 5, 1030 (1972). ⁶ А. С. Гринберг, Латв. матем. ежегодник, т. 9, 39 (1971). ⁷ Н. С. Романовский, Алгебра и логика, т. 10, № 4, 401 (1971). ⁸ В. Н. Neumann, Н. Neumann, Р. М. Neuman, Math. Zs., В. 80, № 1, 44 (1962). ⁹ А. Л. Шмелькин, ДАН, т. 149, № 3, 543 (1963). ¹⁰ С. М. Вовси, Матем. сб., т. 93, № 3, 405 (1974). ¹¹ С. М. Вовси, Сб. Некоторые вопросы теории групп, Рига, 1971, стр. 14. ¹² С. М. Вовси, Сиб. матем. журн., т. 13, № 2, 272 (1972).