

В. А. БОНДАРЕНКО, П. П. ЗАБРЕЙКО

ОПЕРАТОР СУПЕРПОЗИЦИИ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 10 IX 1973)

Хорошо известна роль теории сингулярных интегральных уравнений при исследовании различных задач теории упругости и пластичности, теории волн и др. (см., например, ^(1, 2)). В последние годы большое внимание уделяется нелинейным сингулярным уравнениям. При этом оказалось необходимым изучить свойства простейшего нелинейного оператора — оператора суперпозиции $fx=f[t, x(t)]$ в пространствах гёльдеровых функций. В работах ⁽³⁻⁷⁾ был получен ряд результатов в этом направлении. Однако возникающая теория еще далека от своего завершения.

Авторы предприняли попытку найти общие характеристики функции $f(t, u)$, которые гарантируют ограниченность, непрерывность и другие свойства оператора суперпозиции, действующего из одного общего гёльдерового пространства функций в другое. Полученные результаты оказались новыми даже для классических пространств Гёльдера H_α .

1. Напомним некоторые определения. Говорят ⁽⁸⁾, что определенная на $(0, \infty)$ функция $\varphi(\delta)$ является Φ -функцией, если она неубывающая вместе с функцией $\varphi^*(\delta)=\delta/\varphi(\delta)$. Ниже рассматриваются только такие Φ -функции, для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi^*(\delta) = 0. \quad (1)$$

Пусть φ — некоторая Φ -функция. Множество H_φ определенных на $[a, b]$ вещественных функций $x=x(t)$, каждая из которых удовлетворяет условию

$$|x(t) - x(s)| = O[\varphi(|t-s|)], \quad (2)$$

с нормой

$$\|x\|_{H_\varphi} = \max \left\{ \|x\|_C, \sup \frac{|x(t) - x(s)|}{\varphi(|t-s|)} \right\} \quad (3)$$

образует (см., например, ⁽⁹⁾) банахово пространство, которое чаще всего называют гёльдеровым пространством функций. Подмножество H_φ^0 пространства H_φ функций $x=x(t)$, каждая из которых удовлетворяет условию

$$|x(t) - x(s)| = o[\varphi(|t-s|)], \quad (4)$$

является замкнутым подпространством пространства H_φ . Как показано в ⁽⁹⁾, пространство H_φ несепарабельно, а пространство H_φ^0 сепарабельно.

Если $\varphi(\delta)=\delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, то пространство H_φ — это обычное пространство H_α функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α , H_α^0 — пространство функций, удовлетворяющих усиленному условию Гёльдера $|x(t) - x(s)| = o(|t-s|^\alpha)$.

Пусть φ и ψ — две Φ -функции. Пишут $\varphi \leq \psi$, если $\varphi(\delta) = O[\psi(\delta)]$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\varphi \leq \psi$ в противном случае; аналогично пишут $\varphi \ll \psi$, если $\varphi(\delta) = o[\psi(\delta)]$ при $\delta \rightarrow 0$, и $\varphi \ll \psi$ в противном случае. Условие $\varphi \leq \psi$ равносильно (см., например, ⁽⁵⁾) каждому из вложений $H_\varphi \subset H_\psi$, $H_\varphi^0 \subset H_\psi$ и $H_\varphi^0 \subset H_\psi^0$, а условие $\varphi \ll \psi$ — вложению $H_\varphi \subset H_\psi^0$.

2. Пусть $f(t, u)$ — функция, определенная в полосе $R = \{(t, u): a \leq t \leq b, -\infty < u < \infty\}$. Рассмотрим оператор суперпозиции

$$fx = f[t, x(t)]. \quad (5)$$

Ниже через $W(t_0, x_0, r, \delta)$, где $(t_0, x_0) \in R$, $0 < r, \delta < \infty$, обозначается множество точек $(t, x) \in R$, удовлетворяющих неравенствам

$$|t - t_0| \leq \delta, \quad |x - x_0| \leq r\varphi(|t - t_0|).$$

Пусть φ и ψ — две Φ -функции.

Теорема 1. Оператор суперпозиции (5) действует из пространства H_φ (из пространства H_φ^0) в пространство H_ψ в том и только в том случае, когда для любых $(t_0, x_0) \in R$ и $r > 0$ можно указать такие положительные числа m и δ (когда для любой $(t_0, x_0) \in R$ можно указать такие положительные числа r, m и δ), что

$$|f(t, u) - f(s, v)| \leq m \left\{ \psi(|t - s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u - v|}{r} \right) \right] \right\}, \quad (6)$$

$$(t, u), (s, v) \in W(t_0, x_0, r, \delta).$$

Теорема 1 ранее была известна ^(3, 4) лишь в частном случае, когда функция $f(t, u)$ не зависит от t .

Из того факта, что оператор суперпозиции (5) действует из H_φ в H_ψ , не вытекает непрерывность функции $f(t, u)$ по u — соответствующий пример был построен в ⁽⁴⁾. Подчеркнем, что теорема 1 охватывает и случаи, когда функция $f(t, u)$ разрывна.

Отметим одно следствие теоремы 1. Если $\varphi \leq \psi$ и оператор суперпозиции (5) действует из H_φ (H_φ^0) в H_ψ , то функция $f(t, u)$ не зависит от u . Таким образом, представляет интерес лишь случай, когда $\varphi \leq \psi$.

Рассмотрим еще случай, когда функция $\psi \circ \varphi^{-1}$ удовлетворяет условию

$$\psi[\varphi^{-1}(2\lambda)] = O\{\psi[\varphi^{-1}(\lambda)]\} \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0. \quad (7)$$

Тогда из теоремы 1 вытекает, что условие действия оператора (5) из H_φ в H_ψ и из H_φ^0 в H_ψ эквивалентны.

3. При исследовании условий ограниченности действующего из одного гильбертова пространства функций в другое оператора суперпозиции основную роль играют следующие два утверждения.

Лемма 1. Пусть $f(t, 0) = 0$ и

$$|f(t, u) - f(s, v)| \leq m \left\{ \psi(|t - s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u - v|}{r} \right) \right] \right\}, \quad |u|, |v| \leq r, \quad (8)$$

где m и r — некоторые постоянные.

Тогда оператор суперпозиции (5) действует из H_φ в H_ψ и

$$\sup_{\|x\|_{H_\varphi} \leq r} \|fx\|_{H_\psi} \leq 2m.$$

Лемма 2. Пусть $f(t, 0) = 0$ и оператор суперпозиции (5) действует из H_φ^0 в H_ψ , причем

$$\sup_{\|x\|_{H_\varphi} \leq r} \|fx\|_{H_\psi} \leq n,$$

где n и r — некоторые постоянные.

Тогда выполнено условие (8), в котором $m = 3n$.

Из лемм 1 и 2 вытекает

Теорема 2. Оператор (5) действует из пространства H_φ (из пространства H_φ^0) в пространство H_ψ и ограничен в том и только в том случае, когда для любого $r > 0$ существует такое число m , что

$$|f(t, u) - f(s, v)| \leq m \left\{ \psi(|t - s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u - v|}{r} \right) \right] \right\}, \quad |u|, |v| \leq r. \quad (9)$$

Из теоремы 2 следует, что необходимым условием ограниченности действующего из H_Φ или из H_Φ^0 в H_Φ оператора суперпозиции (5) является непрерывность функции $f(t, u)$ (см. также (6)).

4. Леммы 1 и 2 позволяют получить и условия непрерывности действующего из H_Φ в H_Φ оператора суперпозиции. Именно, верна

Теорема 3. Пусть оператор суперпозиции (5) действует из H_Φ или из H_Φ^0 в H_Φ и $x_0 \in H_\Phi$.

Тогда он непрерывен в точке x_0 в том и только в том случае, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} & |f[t, x_0(t) + u] - f[t, x_0(t)] - f[s, x_0(s) + v] + f[s, x_0(s)]| \leq \\ & \leq \varepsilon \left\{ \psi(|t-s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u-v|}{\delta} \right) \right] \right\}, \quad |u|, |v| \leq \delta. \end{aligned} \quad (10)$$

Из лемм 1, 2 легко получаются необходимые и достаточные условия равномерной (на каждом шаре) непрерывности оператора (5).

Теорема 4. Пусть оператор суперпозиции (5) действует из H_Φ или из H_Φ^0 в H_Φ .

Тогда он равномерно непрерывен в том и только в том случае, когда для любых положительных ε и r можно указать такое положительное число δ , что

$$\begin{aligned} & |f(t, x+u) - f(t, x) - f(s, y+v) + f(s, y)| \leq \\ & \leq \varepsilon \left\{ \psi(|t-s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|x-y|}{r} \right) \right] + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u-v|}{\delta} \right) \right] \right\}, \quad (11) \\ & |x|, |y| \leq r, \quad |u|, |v| \leq \delta. \end{aligned}$$

5. Перейдем к операторам со значениями в H_Φ^0 .

Теорема 5. Оператор суперпозиции (5) действует из пространства H_Φ (из пространства H_Φ^0) в пространство H_Φ^0 в том и только в том случае, когда для любых $(t_0, x_0) \in R$ и $\varepsilon, r > 0$ можно указать такое положительное число δ (когда для любых $(t_0, x_0) \in R$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такие положительные числа r и δ), что

$$\begin{aligned} & |f(t, u) - f(s, v)| \leq \varepsilon \left\{ \psi(|t-s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u-v|}{r} \right) \right] \right\}, \quad (12) \\ & (t, u), (s, v) \in W(t_0, x_0, r, \delta). \end{aligned}$$

Из теоремы 5 вытекает, что функция $f(t, u)$, определяющая действующий из H_Φ в H_Φ^0 оператор суперпозиции (5), не зависит от u , если $\varphi \ll \psi$.

Теорема 6. Оператор суперпозиции (5) действует из пространства H_Φ^0 в пространство H_Φ^0 и непрерывен в том и только в том случае, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} & |f(t, u) - f(s, v)| \leq \varepsilon \left\{ \psi(|t-s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u-v|}{r} \right) \right] \right\}, \quad (13) \\ & |t-s|, |u-v| \leq \delta, \quad |u|, |v| \leq r. \end{aligned}$$

Ранее теорема 6 была известна в частном случае, когда $\varphi = \psi$ (см. (5)).

Из теоремы 6 вытекает, что действующий из H_Φ^0 в H_Φ^0 оператор суперпозиции (5) ограничен, если он непрерывен и если выполнено условие (7).

Теорема 7. Пусть для любых $(t_0, x_0) \in R$ и $\varepsilon, r > 0$ можно указать такое положительное число δ , что

$$\begin{aligned} & |f(t, u) - f(s, v)| \leq \varepsilon \left\{ \psi(|t-s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u-v|}{r} \right) \right] \right\}, \quad (14) \\ & |t-t_0|, |s-t_0| \leq \delta, \quad |u-x_0|, |v-x_0| \leq \delta. \end{aligned}$$

Тогда оператор суперпозиции (5) действует из пространства $H_\bullet$ в пространство H_ϕ^0 и непрерывен.

Отметим, что можно построить пример функции $f(t, u)$, показывающий, что утверждение, обратное теореме 7, не имеет места.

Теорема 8. Оператор суперпозиции (5) действует из пространства $H_\bullet^0$ в пространство H_ϕ^0 и компактен в том и только том случае, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$|f(t, u) - f(s, v)| \leq \varepsilon \left\{ \psi(|t-s|) + \psi \left[\varphi^{-1} \left(\frac{|u-v|}{r} \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

$$|t-s|, |u-v| \leq \delta, \quad |u|, |v| \leq r;$$

при этом оператор (5) равномерно непрерывен.

Авторы благодарны М. А. Красносельскому за обсуждение результатов статьи.

Ярославский государственный
университет

Поступило
12 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. ² Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, М., 1970. ³ А. А. Бабаев, Уч. зап. Азерб. гос. ун-та, № 4, 13 (1961). ⁴ М. З. Берколайко, Тр. семинара по функц. анализу, Воронеж, в. 12, 96 (1969). ⁵ М. З. Берколайко, Я. Б. Ругицкий, ДАН, т. 192, № 6, 1243 (1970). ⁶ М. З. Берколайко, Я. Б. Ругицкий, Сибирск. матем. журн., т. 12, № 5, 1013 (1971). ⁷ А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, Изв. АН АзербССР, № 6, 107 (1963). ⁸ П. П. Забрейко, Тр. семинара по функц. анализу, Воронеж, в. 8, 1 (1966). ⁹ С. Г. Крейн, Ю. П. Петунин, УМН, т. 21, № 2, 89 (1966).