

УДК 519.3

МАТЕМАТИКА

Л. Ф. ЗЕЛИКИНА

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ
ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 8 IV 1975)

В данной работе строится синтез оптимальных траекторий в n -мерном пространстве, а также находится асимптотика оптимальных траекторий и универсальные многообразия различных размерностей для задач оптимального управления с линейной вектограммой.

Для построения синтеза в задачах оптимального управления с линейной вектограммой основным является построение особых многообразий, т. е. таких многообразий, на которых управление не определяется из условия максимума гамильтониана (см. ⁽¹⁾). Наибольший интерес среди особых многообразий представляют многообразия, притягивающие к себе оптимальные траектории; следуя Айзексу ⁽²⁾, будем называть такие многообразия универсальными. Айзекс привел в ⁽²⁾ эвристические соображения, показывающие, что в $\mathbb{R}^3$ могут существовать универсальные кривые. Там же он высказал гипотезу, что линейность вектограмм относительно нескольких управлений может привести к универсальным многообразиям ко-размерности большей единицы, и поставил вопрос, являются ли такие многообразия пересечением нескольких универсальных гиперповерхностей. Положительным ответом на эти вопросы служит синтез для системы (1).

При рассмотрении задач оптимального управления в математической экономике возникают трудности, связанные с выбором критерия оптимальности. В связи с этим встает вопрос о нахождении инвариантов оптимального синтеза относительно выбора критерия оптимальности. Подход к решению этой проблемы для задач с дискретным временем намечен в теоремах о магистрали, в которых находится единая асимптотика оптимальных траекторий для некоторого класса терминальных функционалов ⁽³⁾; при этом оптимальные траектории большую часть времени проводят в окрестности некоторой кривой, называемой магистралью. В работе получено полное решение этой проблемы для задач с непрерывным временем, описываемых системой (1); именно показано, что не только магистраль, но и весь начальный участок оптимальной траектории не зависит от выбора критерия оптимальности, а также выяснено, что с точки зрения теории оптимального управления магистральные поверхности являются универсальными многообразиями.

Рассмотрим задачу оптимального управления системой

$$\dot{x} = uQ(x), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}_+^n$, управление $u = (u_1, \dots, u_n)$ — вектор, принадлежащий симплексу $\sum_{i=1}^n u_i = 1$, $u_i \geq 0$, Q — скалярная функция, $Q(x) \neq 0$ в $\mathbb{R}_+^n$, $Q \in C^3(\mathbb{R}_+^n)$, $\partial Q / \partial x_i > 0$. В качестве критерия оптимальности рассматривается функционал

$$R(x(T), T), \quad (2)$$

где T — момент первого достижения фазовой точкой x многообразия $M(x, t) = 0$; здесь R и M — скалярные функции; $R, M \in C^1(\mathbf{R}_+^n)$. В дальнейшем многообразия $M(x, t) = 0$ будем называть целью. Например, в задаче наискорейшего попадания на цель $M(x) = 0$ из точки (x_0, t_0) требуется минимизировать $R(x(T), T) = T - t_0$.

Определение. Множество V нулевой меры называется универсальным, если для любой точки $(x, t) \in V$ существует $T_0 > t$ такое, что для каждого $T \in (t, T_0)$ найдется такая окрестность $U_{x, t}$ точки (x, t) , что для всех точек $(x_0, t_0) \in U_{x, t}$ оптимальная траектория, выходящая из точки (x_0, t_0) , в момент времени T окажется на множестве V .

Часть фазового пространства $\tilde{V}$ и оптимальный синтез в $\tilde{V}$ будем называть универсальной структурой оптимального синтеза, если для любой точки $(x_0, t_0) \in \tilde{V}$ оптимальная траектория, начинающаяся в точке (x_0, t_0) , попадает на универсальное множество; иными словами, под универсальной структурой понимается поведение оптимальных траекторий в области притяжения универсального множества.

В нашем случае универсальное множество является стратифицированным многообразием (*), k -мерные страты которого будем называть универсальными k -мерными многообразиями.

Теорема 1. Пусть функция $Q(x)$ такова, что:

1) множество $\partial Q / \partial x_1 = \partial Q / \partial x_2 = \dots = \partial Q / \partial x_n$ непусто в $\mathbf{R}_+^n$;

2) на множестве $\partial Q / \partial x_i = \partial Q / \partial x_j \geq \max_{l \neq i, j} (\partial Q / \partial x_l)$ выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) < 0;$$

3) для любого набора $i_1, \dots, i_k$, $k = 2, \dots, n$, плюккеровы координаты проекции $(k-1)$ -вектора (см. (*), стр. 22), ортогонального к многообразию $\partial Q / \partial x_{i_1} = \dots = \partial Q / \partial x_{i_k} \geq \max_k (\partial Q / \partial x_l)$, на координатную плоскость $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ не равны 0 и имеют одинаковые знаки, а именно $(-1)^{k-1}$. (Этот $(k-1)$ -вектор натянут на нормали к многообразиям $\partial Q / \partial x_i, -\partial Q / \partial x_j = 0$, где $i, j = i_1, \dots, i_k$.)

Тогда множества

$$\frac{\partial Q}{\partial x_{i_1}} = \frac{\partial Q}{\partial x_{i_2}} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_{i_k}} > \max_l \frac{\partial Q}{\partial x_l}, \quad (3)$$

$$k = 2, \dots, n; l \neq i_1, \dots, i_k,$$

являются универсальными $(n-k+1)$ -мерными многообразиями.

Отметим, что из условий (1) — (3) следует, что универсальные многообразия всех размерностей существуют и являются многообразиями без особенностей.

Универсальная структура в этом случае имеет следующий вид: $(n-1)$ -мерные многообразия $\partial Q / \partial x_i = \partial Q / \partial x_j > \partial Q / \partial x_l$ (для любых $l \neq i, j$) в числе C_n^2 пересекаются по одномерному многообразию

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_n}, \quad (4)$$

разбивая пространство $\mathbf{R}_+^n$ на области, где $\partial Q / \partial x_i > \partial Q / \partial x_l$ (для любых $l \neq i$), и в этой части пространства $u_i = 1$, $u_l = 0$ при $l \neq i$. На многообразиях (3) вектор u пропорционален вектору, координаты которого равны плюккеровым координатам проекции $(k-1)$ -вектора на координатную плоскость $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$; при этом $u_l = 0$ при $l \neq i_1, \dots, i_k$. Отметим, что заданное управление u удерживает фазовую точку на универсальном многообразии. Для наглядности отметим, что универсальное стратифицированное многообразие диффеоморфно совокупности биссектральных гиперповерхностей, обрывающихся в точках взаимного пересечения.

Условия (1)–(3) близки к необходимым условиям того, чтобы универсальная структура оптимального синтеза имела указанный выше вид.

Теорема 2. Универсальная структура оптимального синтеза для задачи оптимального управления системой (1) инвариантна относительно функционалов вида (2), т. е. если при достижении цели оптимальная траектория выходит на универсальное многообразие (4), то для достаточно отдаленных целей весь начальный участок оптимальной траектории не зависит от критерия оптимальности; при этом оптимальные траектории выходят на универсальные многообразия наиболее быстрым образом.

Зная универсальную структуру оптимального синтеза, можно при некоторых дополнительных условиях на функцию $Q(x)$ построить синтез. Для этого достаточно построить поверхности переключения и найти их пересечение со стратифицированным универсальным многообразием.

Например, рассмотрим задачу оптимального быстрого действия для цели $x_n = \text{const}$. Если функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)–(3) и условиям:

а) многообразие (4) не имеет асимптот, параллельных координатным плоскостям;

$$\text{б) } \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_i} - \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) < 0 \text{ в } \mathbf{R}_+^n;$$

$$\text{в) } \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) < 0 \text{ при } i \neq j, \text{ а } \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) \leq 0,$$

то при регрессивном движении от цели фазовая точка либо совсем не выйдет на универсальное многообразие, и тогда произойдет не более одного переключения, либо после выхода на пересечение поверхности переключения с универсальным многообразием фазовая точка идет по универсальному многообразию, последовательно переходя со стратов меньшей размерности на страты большей размерности, и в любой момент может сойти в область, где одно из $\partial Q / \partial x_i$ больше всех остальных. Уравнения поверхностей переключения выписываются явно. На рис. 1 и 2 изображен синтез для $n=2, 3$ соответственно. Пунктиром показаны поверхности переключения, жирной линией — многообразие (4). (Отметим, что ограничения, накладываемые на функцию $Q(x)$, не очень обременительны. В частности, они выполняются для функций вида

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

где $f_i(x_i)$ — любые монотонные, логарифмически выпуклые функции, т. е. $f_i' > 0$ ($\ln f_i(x_i)$)'' < 0).

Аналогичные результаты можно получить для случая, когда в системе (1) имеются неуправляемые переменные, т. е. для системы

$$\dot{x} = uQ(x, y), \quad \dot{y} = F_1(y);$$

при этом, если $Q(x, y) = Q_1(x) \cdot Q_2(y)$, то все универсальные многообразия будут цилиндрическими по y . Так же исследуется случай, когда многообразие (4) пусто, но одно из многообразий (3) не пусто.

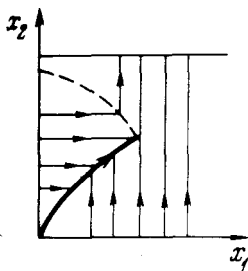


Рис. 1

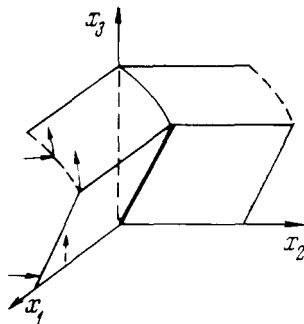


Рис. 2

Несколько иная картина возникает для системы

$$\dot{x}_0 = u_0 k(x) f(x_0), \quad \dot{x}_i = u_i f(x_0), \quad \sum_{i=0}^n u_i = 1.$$

В этом случае уравнения некоторых универсальных многообразий (ответствующих особым режимам, для которых $u_0=0$) обращаются в тождество. Из-за этого в фазовом пространстве возникает область безразличия, в которой любая траектория с $u_0=0$, приводящая фазовую точку на магистраль, является оптимальной. Вне этой области универсальная структура остается прежней.

Задача 1 естественно возникает для ряда экономических задач оптимального распределения ресурсов между производственными секторами, x_i — объем производственных фондов (факторов производства), $Q(x)$ — производственная функция. Теоремы 1 и 2 имеют при этом непосредственную связь с «магистральными» теоремами. Роль пеймановского луча максимального сбалансированного роста, или главной магистрали, играет многообразие (4), которое для задач с бесконечными горизонтами и перспективами планирования является одной из оптимальных траекторий. Для любых достаточно удаленных целей оптимальные траектории, за исключением начального и конечного участков пути, совпадают с многообразием (4), причем при удалении цели участок пути, лежащий на магистрали, неограниченно возрастает. Вычисление универсальных многообразий и оптимального управления на них позволяет установить ряд экономических фактов, а именно: универсальные многообразия определяются условием равенства соответствующих норм эффективности выпуска по факторам производства. Для производственных функций типа Кобба — Дугласа

$Q(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ оптимальное управление на универсальных многообразиях (3) пропорционально α_i — эластичностям выпуска по соответствующим факторам производства — x_i , $i=i_1, \dots, i_k$. Используя теорему 2, можно вывести следующее

Утверждение. Цены оптимального плана (градиент функции Беллмана) для задачи оптимального быстрогодействия инвариантны относительно выбора цели, если только цель достаточно удалена; при этом на магистрали норма дисконтирования равна оптимальному темпу роста и равна норме эффективности, они постоянны лишь для линейно однородных функций, т. е. для функций с постоянными темпами отдачи.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. ² Р. Айзекс, Дифференциальные игры, М., 1967. ³ Х. Никайдо, Выпуклые структуры и математическая экономика, М., 1972. ⁴ Р. Том, Сб. Особенности дифференцируемых отображений, М., 1968. ⁵ Э. Картан, Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, М., 1962.