

УДК 519.214

МАТЕМАТИКА

В. А. МАЛЫШЕВ

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 V 1975)

Пусть $Z^v = \{t = (t^1, \dots, t^v)\}$ — целочисленная решетка в v -мерном евклидовом пространстве R^v , X^{Z^v} — множество функций (конфигураций) на Z^v со значениями в $X = \{-1, 1\}$. Мы будем рассматривать трансляционно-инвариантные случайные поля $\xi(t) = \sigma_t$, $t \in Z^v$, со значениями в X , т. е. инвариантные относительно сдвигов вероятностные меры на X^{Z^v} с обычной Σ -алгеброй.

Для любого конечного $T = \{t_1, \dots, t_n\} \subset Z^v$ положим

$$\sigma_T = \sigma_{t_1} \dots \sigma_{t_n}, \quad S_T = \sum_{t \in T} \sigma_t, \quad \bar{S}_T = \frac{S_T - \langle S_T \rangle}{\sqrt{D(\Sigma \sigma_t)}}$$

и пусть $\langle \sigma_T \rangle$ — среднее значение σ_T .

Условием асимптотической нормальности для $\bar{S}_T$ в одномерном случае посвящено довольно много работ (см., например, (1)). При $v \geq 2$ ряд результатов получен применительно к задачам статистической физики для достаточно низких и достаточно высоких температур методами теории возмущений (1, 2, 5). Здесь мы доказываем один общий результат такого рода и применяем его к задачам статистической физики. Подобная же техника позволяет нам также найти предельные точки в некритической области для разных вариантов ренормализационных групп.

Мы будем говорить, что для случайного поля σ_t имеет место слабое экспоненциальное убывание корреляций (с.э.у.к.), если для любых конечных $T_1, T_2 \subset Z^v$ существуют константы c_1 и c_2 , которые при данном поле могут зависеть лишь от $|T_1 \cup T_2|$, такие, что

$$|\langle \sigma_{T_1 \cup T_2} \rangle - \langle \sigma_{T_1} \rangle \langle \sigma_{T_2} \rangle| < c_1 e^{-c_2 d(T_1, T_2)}, \quad c_2 > 0,$$

где $d(T_1, T_2) = \min_{t_1 \in T_1, t_2 \in T_2} |t_1 - t_2|$.

Теорема 1. Если выполняется условие с.э.у.к. и $D = \sum_{t \in Z^v} \langle \sigma_0 \sigma_t \rangle \neq 0$, то $\bar{S}_V$ асимптотически нормальна при $|V| \rightarrow \infty$.

Пусть теперь для любого целого N

$$S_i^N = \sum_{N! \leq \tilde{t}^i < (N+1)!} \sigma_{\tilde{t}^i}, \quad t = (t^1, \dots, t^v), \quad \tilde{t} = (\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^v).$$

Тогда случайные величины $\xi_N(t) = (S_i^N - \langle S_i^N \rangle) / \sqrt{D S_i^N}$ образуют трансляционно-инвариантное случайное поле с вещественными значениями.

Теорема 2. Последовательность случайных полей $\xi_N(t)$ слабо сходится к случайному полю $\xi(t)$; при этом случайные величины $\xi(t)$ являются взаимно независимыми гауссовскими с нулевым средним и единичной дисперсией.

Мы докажем теорему 1, теорема 2 доказывается аналогично. Достаточно доказать, что n -й семинвариант $M_n(\bar{S}_V)$ случайной величины $\bar{S}_V$ схо-

дятся при $|V| \rightarrow \infty$ к семиинварианту нормированной гауссовой случайной величины, т. е. к нулю при $n \geq 3$.

Лемма 1. Для всех $n \geq 1$

$$M_n(S_V) = \sum_{t_1, \dots, t_n \in V} \langle \sigma_{t_1} \dots \sigma_{t_n} \rangle^{\text{tr}},$$

где $\langle \sigma_T \rangle^{\text{tr}}$ — усеченные корреляционные функции (truncated correlation functions), однозначно определяемые соотношением

$$\langle \sigma_T \rangle = \sum_{\beta} \langle \sigma_{T_1} \rangle^{\text{tr}} \dots \langle \sigma_{T_{e(\beta)}} \rangle^{\text{tr}}, \quad (1)$$

суммирование по всем разбиениям β набора $T = (t_1, \dots, t_n)$ на $e(\beta)$ частей $T_1, \dots, T_{e(\beta)}$.

Доказательство леммы 1 следует по индукции из (1) и известного соотношения

$$\langle (S_V)^n \rangle = \sum_{\alpha} M_{i_1(\alpha)}(S_V) \dots M_{i_{l(\alpha)}(\alpha)}(S_V), \quad (2)$$

суммирование по всем разбиениям α множества $\{1, \dots, n\}$ на $l(\alpha)$ частей $i_1(\alpha), \dots, i_{l(\alpha)}(\alpha)$ — мощности элементов разбиения.

Обозначим $d_T = \max d(T_1, T_2)$, где максимум берется по всем парам (T_1, T_2) , $T_1 \cup T_2 = T$.

Лемма 2. Для любого конечного T существуют такие константы c_3 и c_4 , зависящие разве что от $|T|$, что

$$\langle \sigma_T \rangle^{\text{tr}} \leq c_3 \exp(-c_4 d_T), \quad c_4 > 0.$$

Этот факт отмечен ранее (см. (7), стр. 193), он очевидным образом вытекает из того, что для любого разбиения $A \cup B = T$, $A \cap B = \emptyset$, $\langle \sigma_T \rangle^{\text{tr}}$ — представляется в виде суммы конечного числа членов вида

$$c(\langle \sigma_{A' \cup B'} \rangle - \langle \sigma_{A'} \rangle \langle \sigma_{B'} \rangle) \prod \langle \sigma_{T_i} \rangle,$$

где $A' \subset A$, $B' \subset B$, $A' \cup B' \cup T_i = T$ (см. (6), стр. 315).

Множество всех наборов $R^n = \{(t_1, \dots, t_n), t_i \in V\}$ разобьем на множества $R_d^n = \{(t_1, \dots, t_n) : d_{\{t_1, \dots, t_n\}} = d\}$.

Лемма 3.

$$|R_d^n| \leq |V| (2d+1)^{nn} n!$$

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству аналогичных утверждений, применяемых в аргументе Пайерлса (см., например, доказательство леммы 2 в (9)).

Теорема 1 доказывается теперь совсем просто. Можно считать $\langle \sigma_i \rangle = 0$. Тогда из с.з.у.к. следует, что при $|V| \rightarrow \infty$

$$\lim \frac{D(S_V)}{|V|} = \lim \frac{1}{|V|} \sum_{t_1, t_2 \in V} \langle \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \rangle = D \equiv \sum_{t \in \mathbb{Z}^v} \langle \sigma_0 \sigma_t \rangle,$$

$$0 = (0, 0, \dots, 0).$$

Таким образом, $D(S_V) \sim D|V|$. При $n \geq 3$, используя леммы 1, 2, 3, имеем

$$|M_n(S_V)| \sim \frac{1}{D^{n/2} |V|^{n/2}} \left| \sum_{t_1, \dots, t_n \in V} \langle \sigma_{t_1} \dots \sigma_{t_n} \rangle^{\text{tr}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{D^{n/2} |V|^{n/2}} \sum_{d=0}^{\infty} |V| (2d+1)^{nn} n! u(d),$$

где $u(d) = c_3 \exp(-c_4 d)$. Отсюда и следует теорема 1.

Теоремы 1 и 2 позволяют доказать асимптотическую нормальность среднего спина и сходимость ренормализационной полугруппы в смысле Каданова (см. (1, 10)) для различных решетчатых моделей статистической физики. Мы приведем здесь следующий результат.

Следствие 1. Для двумерной спиновой модели Изинга с внешним полем h и обратной температурой β асимптотическая нормальность среднего спина имеет место для всех значений h и β , кроме критической точки $h=0$, $\beta=\beta_{cr}$. Точнее, это имеет место для крайних точек трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний, число которых, как известно (см. (3)), равно 1 для $h \neq 0$ и $h=0$, $\beta < \beta_{cr}$ и равно 2 для $h=0$, $\beta > \beta_{cr}$.

Это следствие вытекает из свойства с.э.у.к., доказанного в этом случае (см. (3, 4, 6, 8)). В критической точке, по-видимому, центральная предельная теорема не имеет места, но строгое доказательство этого автору неизвестно.

Следствие 1 имеет место также для ряда других спиновых моделей, где доказано свойство с.э.у.к. (см. (6-8)).

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 с небольшим изменением формулировок обобщаются, например, на случай, когда $\xi(t)$ — ограниченные вещественные случайные величины. При этом условие с.э.у.к. может быть сформулировано в виде условий регулярности и перемешивания, предложенных в работе (12).

Мы определим теперь различные ренормализационные полугруппы. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, Σ, μ) и пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех трансляционно инвариантных вещественных случайных полей $\xi(t)$ таких, что $\xi(t) \in L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ для всех $t \in \mathbb{Z}^v$. Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}$ — множество всех стохастических ортогональных мер на S^v , где $S = [-\pi, \pi]$, симметричных относительно нуля. Известно (13), что между $\mathfrak{M}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ имеется взаимно однозначное соответствие, записываемое в следующем виде:

$$\xi(t) = \int_{S^v} e^{i(t, \omega)} \tilde{\mu}(d\omega), \quad \tilde{\mu} \in \tilde{\mathfrak{M}}.$$

1. Ренормализационная полугруппа в смысле Каданова (10) A_α^k , $k=1, 2, \dots$; $-\infty < \alpha < \infty$:

$$(A_\alpha^k \xi)(t) = \frac{1}{k^{v\alpha/2}} \sum_{i^k \leq \tilde{t} < (i^k + 1)^k} \xi(\tilde{t}).$$

При этом $A_\alpha^k A_\alpha^{k'} = A_\alpha^{kk'}$. Теорема 2 утверждает по существу, что в условиях теоремы 1 $A_\alpha^k \xi$ слабо сходится только при $\alpha=1$ и при этом его пределом является гауссовское поле с независимыми значениями.

2. Ренормализационная полугруппа в смысле Вильсона R_y^s : $\tilde{\mathfrak{M}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{M}}$, $s \geq 1$, $-\infty < y < \infty$:

$$(R_y^s \tilde{\mu})(A) = s^y \tilde{\mu} \left(\frac{1}{s} A \right), \quad A \subset S^v.$$

При этом $R_y^s \cdot R_{y'}^{s'} = R_{y+y'}^{ss'}$. Отметим, что в физических работах такая полугруппа вводится обычно в конечном объеме (14).

R_y^s не совпадает с A_α^k , но имеет место

Теорема 3. В условиях теоремы 1 $R_y^s \tilde{\mu}$ имеет слабый предел только для $y=v/2$ и при этом этот предел является гауссовским полем с независимыми значениями.

3. Мы будем теперь рассматривать обобщенные случайные поля над некоторым пространством основных функций на $\mathbb{R}^n$, например, над пространством $D(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Наше поле σ_i можно рассматривать как обобщенное случайное поле, если для любой $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n)$ положить

$$\sigma(\varphi) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \varphi(t) \sigma_t.$$

Положим $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

Ренормализационная группа. Для произвольного обобщенного случайного поля ξ с нулевым средним определим

$$(R_z^\lambda \xi)(\varphi) = \lambda^z \xi(\varphi_\lambda), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad \lambda > 0.$$

Для заданного z это определяет (ренормализационную) группу преобразований.

Теорема 4. Пусть $\langle \sigma_i \rangle = 0$ и выполнены условия теоремы 1.

Тогда последовательность $R_z^\lambda \sigma$ для $z = n/2$ при $\lambda \rightarrow 0$ слабо сходится к стационарному гауссовому обобщенному случайному полю с независимыми значениями (белому шуму).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. Gallavotti, H. J. F. Knops, Commun. Math. Phys., v. 36, № 3, 171 (1974).
- ² Р. А. Минлоз, А. М. Халфина, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 5, 1173 (1970).
- ³ A. Messager, S. Miracle-Solé, Commun. Math. Phys., v. 40, № 2, 187 (1975). ⁴ J. Lebowitz, A. Martin-Löf, ibid., v. 25, № 4, 276 (1972). ⁵ A. Martin-Löf, ibid., v. 32, № 1, 75 (1973). ⁶ J. Lebowitz, ibid., v. 28, № 4, 301 (1972). ⁷ M. Duneau, D. Jagolnitzer, B. Souillard, ibid., v. 31, № 3, 191 (1973). ⁸ M. Duneau, D. Jagolnitzer, B. Souillard, ibid., v. 35, № 4, 307 (1974). ⁹ V. A. Malyshev, ibid., v. 40, № 1, 75 (1975). ¹⁰ Я. Г. Сунай, Теория вероятностей и ее применения, т. 20, № 3 (1975). ¹¹ В. Статулявичус, Литовск. матем. сб., т. 10, № 3, 583 (1970). ¹² Р. Л. Добрушин, Теория вероятностей и ее применения, т. 13, № 2, 201 (1968). ¹³ И. И. Гухман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. 1, М., «Наука», 1971. ¹⁴ Ma Shang-keng, Rev. Modern Phys., v. 45, № 4, 589 (1973).