

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА
К ЗАДАЧЕ УИТТЕКЕРА

Известна следующая

Задача Уиттекера. Пусть заданы возрастающие последовательности целых чисел $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{q_j\}_{j=0}^{\infty}$ и две целые функции $f(z)$ и $g(z)$. Требуется найти * целую функцию $h(z)$ из условий

$$\begin{aligned} h^{(p_i)}(0) &= f^{(p_i)}(0), \quad i=0, 1, \dots, \\ h^{(q_j)}(1) &= g^{(q_j)}(1), \quad j=0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

При этом предполагается также, что необходимым условием разрешимости сформулированной задачи является выполнение неравенства

$$P(m) + Q(m) \geq m, \quad (2)$$

где $P(m)$ и $Q(m)$ — количество чисел соответственно p_i и q_j , меньших m (кроме того, в (2) знак равенства должен иметь место для бесконечной последовательности $\{m_r\}$).

Рассмотрим, однако, некоторую целую функцию $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^s$ и положим $g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{p_i} z^{p_i}$, где $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ — произвольная возрастающая последовательность целых чисел. Тогда, очевидно, функция $h(z)$, $h(z) = g(z)$, удовлетворяет соотношениям (1) с также произвольными q_j , $j=0, 1, \dots$. В то же время последовательности $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{q_j\}_{j=0}^{\infty}$ можно выбрать настолько «редкими» (например, $p_i = 3i$ и $q_j = 5j$), чтобы условие (2) уже не выполнялось. Следовательно, условие (2) для разрешимости задачи Уиттекера не является необходимым.

Предположим, что множество $\{\lambda_s\} = \{n\}_{n=0}^{\infty} - \{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ является конечным и состоит из чисел ** $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N$. Тогда, учитывая соотношение (1), решение задачи Уиттекера следует искать в виде

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{v=0}^{\infty} h_v z^v = \sum_{s=0}^N h_{\lambda_s} z^{\lambda_s} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq \lambda_0, \dots, \lambda_N}}^{\infty} f_j z^j = \\ &= f(z) - \sum_{s=0}^N f_{\lambda_s} z^{\lambda_s} + \sum_{s=0}^N h_{\lambda_s} z^{\lambda_s}, \end{aligned}$$

причем неизвестные коэффициенты $\{h_{\lambda_s}\}_{s=0}^N$ должны, очевидно, опреде-

* Некоторые достаточные условия разрешимости задачи Уиттекера получены (исходя из определенных свойств соответствующих линейных алгебраических уравнений) в работе (1).

** Мы считаем их упорядоченными по возрастанию.

латься из уравнений

$$\left(\sum_{s=0}^N h_{\lambda_s} z^{\lambda_s} \right)^{(q_j)} \Big|_{z=1} = g^{(q_j)}(1) - f^{(q_j)}(1) + \left(\sum_{s=0}^N f_{\lambda_s} z^{\lambda_s} \right)^{(q_j)} \Big|_{z=1}, \quad (3)$$

$$j=0, 1, \dots$$

Поэтому, если все числа q_j больше чем λ_N , то из (3) следует, что необходимо

$$g^{(q_j)}(1) = f^{(q_j)}(1), \quad j=0, 1, \dots,$$

а в качестве $\{h_{\lambda_s}\}$ можно взять произвольные комплексные числа.

Если же $q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_M \leq \lambda_N < q_{M+1}$, то, как видно из (3),

$$g^{(q_j)}(1) = f^{(q_j)}(1), \quad j=M+1, M+2, \dots,$$

а $\{h_{\lambda_s}\}_{s=0}^N$ должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{\max(\lambda_0, q_j) \leq \lambda_s \leq \lambda_N} h_{\lambda_s} C_{\lambda_s}^{q_j} = \frac{g^{(q_j)}(1) - f^{(q_j)}(1)}{q_j!} + \sum_{\max(\lambda_0, q_j) \leq \lambda_s \leq \lambda_N} f_{\lambda_s} C_{\lambda_s}^{q_j}, \quad (4)$$

$$j=0, 1, \dots, M.$$

Поэтому верны следующие утверждения.

Теорема 1. Если дополнение множества $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ко всем целым неотрицательным числам состоит лишь из $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N$, $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$, и $q_j > \lambda_N$, $j=0, 1, \dots$, то задача Уиттекера разрешима тогда и только тогда, когда

$$g^{(q_j)}(1) = f^{(q_j)}(1), \quad j=0, 1, \dots$$

В этом случае общее решение $h(z)$ этой задачи может быть представлено в виде

$$h(z) = f(z) + H_{\lambda_N}(z),$$

где $H_{\lambda_N}(z) = h_{\lambda_0} z^{\lambda_0} + \dots + h_{\lambda_N} z^{\lambda_N}$, а $\{h_{\lambda_s}\}_{s=0}^N$ произвольны.

Теорема 2. Если дополнение множества $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ко всем целым неотрицательным числам состоит лишь из $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N$, $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$, и $q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_M \leq \lambda_N < q_{M+1}$, то задача Уиттекера разрешима тогда и только тогда, когда

$$g^{(q_j)}(1) = f^{(q_j)}(1), \quad j=M+1, M+2, \dots,$$

а система уравнений (4) имеет решение. В этом случае общее решение этой задачи может быть представлено в виде

$$h(z) = f(z) + h_{\lambda_0} z^{\lambda_0} + \dots + h_{\lambda_N} z^{\lambda_N},$$

где числа $\{h_{\lambda_s}\}_{s=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (4).

Меняя ролями последовательности $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{q_j\}_{j=0}^{\infty}$, мы получаем также следующие утверждения.

Теорема 1'. Если дополнение множества $\{q_j\}_{j=0}^{\infty}$ ко всем целым неотрицательным числам состоит лишь из $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N$, $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_N$, и $p_i > \mu_N$, $i=0, 1, \dots$, то задача Уиттекера разрешима тогда и только тогда, когда

$$f^{(p_i)}(0) = g^{(p_i)}(0), \quad i=0, 1, \dots$$

В этом случае общее решение $h(z)$ этой задачи может быть представлено в виде

$$h(z) = g(z) + \tilde{H}_{\mu_N}(z),$$

где

$$\tilde{H}_{\mu_N}(z) = \tilde{h}_{\mu_0} (z-1)^{\mu_0} + \dots + \tilde{h}_{\mu_N} (z-1)^{\mu_N},$$

а $\{\tilde{h}_{\mu_i}\}_{i=0}^N$ произвольны.

Теорема 2'. Если дополнение множества $\{q_j\}_{j=0}^{\infty}$ ко всем целым неотрицательным числам состоит лишь из $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N, \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_N$, и $p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_M \leq \mu_N < p_{M+1}$, то задача Уиттекера разрешима тогда и только тогда, когда

$$f^{(p_i)}(0) = g^{(p_i)}(0), \quad i = M+1, M+2, \dots,$$

а система уравнений

$$\sum_{\max(\mu_0, p_i) \leq \mu_l \leq \mu_N} \tilde{h}_{\mu_l} C_{\mu_l}^{p_i} (-1)^{\mu_l - p_i} = \frac{f^{(p_i)}(0) - g^{(p_i)}(0)}{p_i!} +$$

$$+ \sum_{\substack{\max(\mu_0, p_i) \leq \mu_l \leq \mu_N \\ i=0, 1, \dots, M}} g_{\mu_l} C_{\mu_l}^{p_i} (-1)^{\mu_l - p_i},$$

имеет хотя бы одно решение $\{\tilde{h}_{\mu_l}\}_{l=0}^N$.

В этом случае общее решение $h(z)$ этой задачи может быть представлено в виде

$$h(z) = g(z) + \tilde{h}_{\mu_0} (z-1)^{\mu_0} + \dots + \tilde{h}_{\mu_N} (z-1)^{\mu_N},$$

где числа $\{\tilde{h}_{\mu_l}\}_{l=0}^N$ удовлетворяют условиям (5).

В общем же случае (т. е. когда ни дополнение $\{p_i\}$, ни дополнение $\{q_j\}$ к множеству всех целых неотрицательных чисел не является конечным) мы можем заметить следующее. Обозначая через $h_0(z)$ функцию $\sum_{i=0}^{\infty} f_{p_i} z^{p_i}$, будем искать решение задачи Уиттекера в виде

$$h(z) = \sum_{s=0}^{\infty} h_{\lambda_s} z^{\lambda_s} + h_0(z)$$

(здесь, как и раньше, $\{\lambda_s\}$ — дополнение $\{p_i\}$ к множеству всех целых неотрицательных чисел). Тогда, как это следует из (1), коэффициенты $\{h_{\lambda_s}\}$ должны быть решениями системы уравнений

$$\sum_{q_j \leq \lambda_s < \infty} h_{\lambda_s} C_{\lambda_s}^{q_j} = \frac{g^{(q_j)}(1) - h_0^{(q_j)}(1)}{q_j!}, \quad j=0, 1, \dots \quad (6)$$

Следовательно, задача Уиттекера разрешима тогда и только тогда, когда система (6) имеет хотя бы одно такое решение $\{h_{\lambda_s}\}$, что $\lim_{s \rightarrow \infty} (|h_{\lambda_s}|)^{1/\lambda_s} = 0$.

Совершенно аналогично, естественно, можно утверждать также о разрешимости задачи Уиттекера в том и только том случае, когда существует хотя бы одно решение $\{\tilde{h}_{\mu_l}\}$, $\lim_{l \rightarrow \infty} (|\tilde{h}_{\mu_l}|)^{1/\mu_l} = 0$, системы

$$\sum_{p_i \leq \mu_l < \infty} \tilde{h}_{\mu_l} C_{\mu_l}^{p_i} (-1)^{\mu_l - p_i} = \frac{f^{(p_i)}(0) - h_1^{(p_i)}(0)}{p_i!}, \quad i=0, 1, \dots, \quad (7)$$

где $h_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_{q_j} (z-1)^{q_j}$.

Здесь уместно заметить, что на основании известной теоремы Поля (⁽²⁾, стр. 45) системы (6) и (7) имеют даже бесконечное множество решений таких, что ряды в их левых частях сходятся абсолютно. Но существует ли хотя бы одно решение, являющееся коэффициентами целой функции?

Поступило
30 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ P. Vermes, J. Anal. Math., v. 2, 450 (1952–1953). ² P. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960.