

В. М. КАЛНИН

О ПРИМЕНЕНИИ ЧАСТОТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 9 IV 1974)

Рассматривается устойчивость численного решения задачи Коши для систем

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u(t)), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

осуществляемого какими-либо известными методами численного интегрирования,

$$x_{k(i+1)} = F(x_{k(i+m)}, f_{k(i+m)}, \Delta t, c_v), \quad (2)$$

где F — функция, определяемая алгоритмом, Δt — шаг, i и m — номера шагов (основного и вспомогательных), c_v — постоянные коэффициенты.

Показывается возможность эффективного перенесения в данную область теории вычислений частотных методов исследования устойчивости, применяемых в теории регулирования ⁽¹⁾ для анализа устойчивости физических систем с обратными связями.

1°. Мы предполагаем, что класс решаемых уравнений (1) ограничен уравнениями, допускающими линеаризацию и имеющими асимптотически устойчивые в целом (в смысле Ляпунова) точные решения. При этом $u_k(t)$ и $x_k(t)$ кусочно непрерывны, равны 0 при $t \leq 0$ и абсолютно интегрируемы. Тогда динамические свойства системы численного интегрирования однозначно определяются системой передаточных функций $\Pi_{ku}(p)$ или частотных характеристик $W_{ku}(\omega)$:

$$\Pi_{ku}(p) = \frac{L[x_k(t)]}{L[u_k(t)]}, \quad W_{ku}(\omega) = \frac{\Phi[x_k(t)]}{\Phi[u_k(t)]}, \quad (3)$$

где L , Φ , p , ω — символы и аргументы преобразований Лапласа и Фурье.

В результате линеаризации и преобразования по Лапласу уравнений (1) и (2), а затем исключения из них всех промежуточных переменных, кроме $\bar{x}_{ki}$ и $\bar{u}_{ki}$, приходим к системе уравнений численного интегрирования в изображениях переменных

$$\bar{x}_{ki}(p) = \Pi_k(p) \left[\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^n \varepsilon_{kq} \bar{x}_{qi}(p) + \gamma_k \bar{u}_{ki}(p) \right], \quad (4)$$

$$\varepsilon_{kq} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_q} \right) \cdot \Delta t, \quad \gamma_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_k} \right) \cdot \Delta t, \quad k, q=1, 2, \dots, n;$$

здесь $\Pi_k(p)$ — приведенные передаточные функции системы численного интегрирования

$$\Pi_k(p) = \frac{N_k(e^{\Delta t p})}{M_k(e^{\Delta t p})} = \frac{\sum_{\mu=0}^{\mu_1} b_\mu(\varepsilon_{kk}) e^{\mu \Delta t p}}{\sum_{\mu=0}^{\mu_2} a_\mu(\varepsilon_{kk}) e^{\mu \Delta t p}}, \quad (5)$$

N_k, M_k, b_k, a_k — полиномы от положительных степеней $e^{\Delta t p}$ и ε_{kk} . Безразмерные параметры $\varepsilon_{kk} = |\partial f_k / \partial x_k| \cdot \Delta t = \Delta t / \tau_{kk}$, где τ_{kk} — «постоянные времени», Δt — шаг, играют важную роль при анализе динамики систем численного интегрирования. По определению $\Pi_k(0) = 1$, в силу сходимости

$$\lim \Pi_k(p) = \frac{1}{\tau_{kk} p + 1} \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Примеры. а) Для алгоритма Эйлера

$$\Pi_k(p) = \varepsilon_{kk} \frac{1}{e^{\Delta t p} - 1 + \varepsilon_{kk}}.$$

б) Для алгоритма Рунге — Кутты

$$\Pi_k(p) = \frac{\varepsilon_{kk}}{6} \frac{e^{\Delta t p} + (4 - 2\varepsilon_{kk} + 0,5\varepsilon_{kk}^2)e^{0,5\Delta t p} + 1 - \varepsilon_{kk} + 0,5\varepsilon_{kk}^2 - 0,25\varepsilon_{kk}^3}{e^{\Delta t p} - 1 + \varepsilon_{kk} - 0,5\varepsilon_{kk}^2 + \frac{1}{6}\varepsilon_{kk}^3 - \frac{1}{2}\varepsilon_{kk}^4}.$$

в) Для алгоритма Адамса

$$\Pi_k(p) = \frac{\varepsilon_{kk}}{24} \frac{55e^{3\Delta t p} - 59e^{2\Delta t p} + 37e^{\Delta t p} - 9}{e^{4\Delta t p} - e^{3\Delta t p} + \varepsilon_{kk}(\frac{55}{24}e^{3\Delta t p} - \frac{59}{24}e^{2\Delta t p} + \frac{37}{24}e^{\Delta t p} - \frac{9}{24})}.$$

г) Для алгоритма Милна

$$\Pi_k(p) = \varepsilon_{kk} \frac{3e^{4\Delta t p} + (12 - 8\varepsilon_{kk})e^{3\Delta t p} + (3 + 4\varepsilon_{kk})e^{2\Delta t p} - 8e^{\Delta t p}}{9e^{4\Delta t p} + \varepsilon_{kk}(12 - 3\varepsilon_{kk})e^{3\Delta t p} - (9 - 3\varepsilon_{kk} - 4\varepsilon_{kk}^2)e^{2\Delta t p} - 8\varepsilon_{kk}^2e^{\Delta t p} + 3\varepsilon_{kk}}.$$

Из (4) и (5) следует, что системы численного интегрирования принадлежат к классу замкнутых динамических систем с передаточными запаздываниями.

Выражения $W_k(\omega)$ получаются из $\Pi_k(p)$ путем формальной подстановки $p = i\omega$, где $i^2 = -1$. Дискретность систем численного интегрирования не препятствует применению обычных (непрерывных) преобразований Лапласа и Фурье, но при этом частотный диапазон ограничивается областью $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{ш}}$, где $\omega_{\text{ш}} = \pi / \Delta t$ — «шаговая» частота.

2°. Численное решение $\tilde{x}_k(t)$ системы (1) будем называть устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|\tilde{x}_k(t_0) - x_k(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует $|\tilde{x}_k(t) - x_k(t)| < \varepsilon$ для любого $t \geq t_0$ (здесь $x(t)$ — точное решение, t_0 — начальный момент счета). В противном случае численное решение неустойчиво. Будем говорить, что численное решение устойчиво в целом, если оно устойчиво при любых $\delta(\varepsilon)$ во всей области возможных решений системы (1).

Предполагается, что $\tilde{x}_k(t)$ — результат реального вычислительного процесса с конечным шагом $\Delta t \neq 0$ и ошибками округления чисел $\delta_0 \neq 0$.

Ограничения, наложенные выше (см. п. 1°) на класс уравнений (1), делают справедливыми следующие утверждения относительно устойчивости:

а) интегрирование системы (1) устойчиво в целом, если обеспечена устойчивость уравнений первого приближения (4) во всей области решений системы (1);

б) численные решения, устойчивые относительно начальных отклонений $\delta(\varepsilon)$, в силу линейности (4) являются устойчивыми также по отношению к постоянно действующим возмущениям $\varphi(t)$ (в том числе к изменениям $u(t)$, ошибкам округления δ_0 и т. п.).

Из а) вытекает возможность применения здесь частотных методов анализа устойчивости линейных систем — критериев Михайлова (2), Найквиста (3), метода Д-разбиения (4) и др.

3°. Частотными методами достаточно просто решаются различные задачи об устойчивости систем численного интегрирования.

4. Устойчивость интегрирования систем любой сложности, не имеющих замкнутых контуров. В этом случае характеристическое уравнение системы (4) распадается на n уравнений вида $M_k(e^{\Delta t p})=0$, $k=1, 2, \dots, n$, поэтому обеспечение устойчивости интегрирования каждого уравнения, взятого в отдельности, гарантирует устойчивость интегрирования всей системы в целом.

Для ряда алгоритмов (см. примеры в п. 1⁰) характеристические полиномы $M_k(e^{\Delta t p})$ имеют простой вид

$$M_k(e^{\Delta t p}) = e^{\Delta t p} - \varphi(\varepsilon_{kk}), \quad (6)$$

где $\varphi(\varepsilon_{kk})$ — полином от ε_{kk} .

Частотные годографы $M_k(e^{i\bar{\omega}})$, где $\bar{\omega} = \omega \Delta t$ — относительная частота, представляют собой окружности единичного радиуса с центрами в точках $[\varphi(\varepsilon_{kk}), 0]$. Применение к ним критерия устойчивости Михайлова приводит к необходимому и достаточному условию устойчивости

$$-1 \leq \varphi(\varepsilon_{kk}) \leq +1; \quad (7)$$

при этом на границе устойчивости частота колебаний численного решения $\bar{\omega}_{кр} = \arccos \varphi(\varepsilon_{кр})$, где $\varepsilon_{кр}$ — критические значения ε_{kk} , получаемые из условия (7).

Примеры. а) Для алгоритма Эйлера

$$\varphi(\varepsilon_{kk}) = 1 - \varepsilon_{kk}.$$

Область устойчивости $0 \leq \varepsilon_{kk} \leq 2$. Нарушение устойчивости при $\varepsilon_{kk} < 0$ аperiodическое ($\bar{\omega}_{кр} = 0$), при $\varepsilon_{kk} > 2$ — колебательное (с «шаговой» частотой $\bar{\omega}_{кр} = \pi / \Delta t$).

б) Для алгоритма Рунге — Кутты

$$\varphi(\varepsilon_{kk}) = 1 - \varepsilon_{kk} + 1/2 \varepsilon_{kk}^2 - 1/6 \varepsilon_{kk}^3 + 1/24 \varepsilon_{kk}^4.$$

Область устойчивости $\varepsilon_{kk} \leq 2,751$. При $\varepsilon_{kk} > 2,751$ устойчивость нарушается аperiodически ($\bar{\omega}_{кр} = 0$).

Для алгоритмов, у которых выражения $M_k(e^{\Delta t p})$ более сложные, анализ устойчивости целесообразно производить методом Д-разбиения, определяя критические значения ε_{kk} и $\bar{\omega}$ из условий

$$\operatorname{Re} M_k(e^{i\bar{\omega}}) = 0, \quad \operatorname{Im} M_k(e^{i\bar{\omega}}) = 0. \quad (8)$$

Примеры. в) Для алгоритма Адамса

$$M_k(e^{i\bar{\omega}}) = e^{i \cdot 4 \bar{\omega}} - e^{i \cdot 3 \bar{\omega}} + \varepsilon_{kk} \psi(e^{i\bar{\omega}}),$$

где

$$\psi(e^{i\bar{\omega}}) = 55/24 e^{i \cdot 3 \bar{\omega}} - 59/24 e^{i \cdot 2 \bar{\omega}} + 37/24 e^{i\bar{\omega}} - 9/24.$$

Область устойчивости $\varepsilon_{kk} \leq 0,3$. При $\varepsilon_{kk} > 0,3$ устойчивость нарушается колебательно, с «шаговой» частотой ($\bar{\omega}_{кр} = \pi / \Delta t$).

г) Для алгоритма Милна

$$M_k(e^{i\bar{\omega}}) = 9e^{i \cdot 4 \bar{\omega}} + \varepsilon_{kk} (12 - 8\varepsilon_{kk}) e^{i \cdot 3 \bar{\omega}} - (9 - 3\varepsilon_{kk} - 4\varepsilon_{kk}^2) e^{i \cdot 2 \bar{\omega}} - 8\varepsilon_{kk}^2 e^{i\bar{\omega}} + 3\varepsilon_{kk}.$$

Область устойчивости $0,3 \leq \varepsilon_{kk} \leq 0,79$. Нарушение устойчивости колебательное как при $\varepsilon_{kk} < 0,3$ ($\bar{\omega}_{кр} = \pi / \Delta t$), так и при $\varepsilon_{kk} > 0,79$ ($\bar{\omega}_{кр} = 2,57 / \Delta t$).

Б. Устойчивость интегрирования замкнутых систем из двух уравнений. При $n=2$ характеристический частотный полином системы (4) имеет вид

$$M(e^{i\bar{\omega}}) = M_1(e^{i\bar{\omega}}) \cdot M_2(e^{i\bar{\omega}}) + \varepsilon_{oc}^2 N_1(e^{i\bar{\omega}}) \cdot N_2(e^{i\bar{\omega}}), \quad (9)$$

где $\varepsilon_{oc}^2 = -\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}$ — коэффициент обратной связи. Применение критерия Михайлова и метода Д-разбиения дает условия устойчивости в виде соотношений между ε_{11} , ε_{22} и ε_{oc}^2 . Отсюда с помощью формул связи определяются условия устойчивости на плоскости любых других параметров системы.

Пример. Для алгоритма Эйлера

$$N_1=N_2=1, \quad M_1=e^{i\bar{\omega}}+1-\varepsilon_{11}, \quad M_2=e^{i\bar{\omega}}+1-\varepsilon_{22}.$$

Область устойчивости

$$2\varepsilon_{11}-\varepsilon_{14}\varepsilon_{22}+2\varepsilon_{22}-4\leq\varepsilon_{oc}^2\leq\varepsilon_{11}-\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{22}. \quad (10)$$

Отсюда условия устойчивости: на плоскости корней $(\alpha \pm i\beta)$ характеристического уравнения $m^2+(n+1)^2 \leq 1$, где $n=\alpha\Delta t$, $m=\beta\Delta t$, на плоскости коэффициентов $\varepsilon_g \leq 1$ при $\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22} \leq 4$ (где $\varepsilon_g=\Delta t/\tau_g$ при форме записи характеристического уравнения $\tau_m^2 p^2 + \tau_g p + 1 = 0$).

В. Устойчивость интегрирования одноконтурных систем из n уравнений. Применяется критерий Найквиста к частотной характеристике системы (4) в разомкнутом состоянии:

$$W_{pc}(e^{i\bar{\omega}}) = \varepsilon_{oc}^n W_1(e^{i\bar{\omega}}) \cdot W_2(e^{i\bar{\omega}}) \cdots W_n(e^{i\bar{\omega}}), \quad (11)$$

где $\varepsilon_{oc}^n = -\varepsilon_{21}\varepsilon_{32} \cdots \varepsilon_{n(n-1)}\varepsilon_{n1}$, $W_k(e^{i\bar{\omega}}) = \Pi_k(e^{i\bar{\omega}})$, $k=1, 2, \dots, n$.

Если устойчивость интегрирования каждого уравнения в отдельности обеспечена (см. п. А), то для устойчивости интегрирования всей системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Mod } W_{pc}(e^{i\bar{\omega}}) \leq 1 \quad \text{при} \quad \text{Arg } W_{pc}(e^{i\bar{\omega}}) = -\pi. \quad (12)$$

Пример. Для алгоритма Эйлера

$$W_{pc}(e^{i\bar{\omega}}) = \frac{\varepsilon_{oc}^n}{\prod_{k=1}^n (e^{i\bar{\omega}} + 1 + \varepsilon_{kk})}.$$

Если $0 \leq \varepsilon_{kk} \leq 2$ для $k=1, 2, \dots, n$, то при $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\dots=\varepsilon_{nn}=\varepsilon=\Delta t/\tau$ область устойчивости системы

$$\varepsilon \leq 2 \frac{\text{tg}^2(\pi/n) - K^{1/n} [1 + \text{tg}^2(\pi/n)]^{1/2} - 1}{\text{tg}^2(\pi/n) + (K^{1/n} [1 + \text{tg}^2(\pi/n)]^{1/2} - 1)^2}, \quad (13)$$

где $K = \varepsilon_{oc}^n / \varepsilon^n$, n — порядок системы. В более общем случае — при $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{12} \neq \dots \neq \varepsilon_{nn}$ — соотношение (13) дает достаточное условие устойчивости, если брать $\varepsilon = \max(\varepsilon_{kk})$, $k=1, 2, \dots, n$.

Поступило
24 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. Н. Петров, Современные методы проектирования систем автоматического управления, М., «Машиностроение», 1967. ² А. В. Михайлов, Автоматика и телемеханика, № 3, 27 (1938). ³ H. Nyquist, Bell System J., v. 11, № 1 (1932). ⁴ Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 3, 190 (1948).