

В. И. АМСТИСЛАВСКИЙ

О РЕКУРСИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ МНОЖЕСТВ, ПОЛУЧАЕМЫХ R^c -ОПЕРАЦИЯМИ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 4 IV 1975)

В этой заметке изучается связь между рекурсивными функционалами и известными в дескриптивной теории множеств R -операциями А. Н. Колмогорова. Чередую дополнительные и R -операции, получают R^c -операции, введенные А. А. Ляпуновым ⁽¹⁾. Множества, получаемые какой-либо R^c -операцией, обозначаемой R_A^c , над (эффективно) открытыми множествами, называем (эффективными) R_A^c -множествами. Впервые рекурсивные характеристики эффективных R_A^c -подмножеств N и N^N (буква N обозначает множество всех натуральных чисел, N^N — множество всех функций $f: N \rightarrow N$) получил Р. Г. Ниптан в ⁽²⁾. Новая рекурсивная характеристика эффективных R_A^c -подмножеств N установлена в ⁽³⁾, при этом использованы приведенные в ⁽⁴⁾ элементы теории функционалов, рекурсивных относительно какого-либо совместного функционала. Теперь мы обобщим эти факты из ⁽⁴⁾ и на этой основе, обобщая результаты ⁽³⁾, получим рекурсивные характеристики как эффективных, так и классических R_A^c -множеств в некоторых пространствах мощности континуума, в том числе в пространстве Бэра. Упомянутые выше результаты (⁽²⁾, 7.5а и § 8) также можно получить из наших. Затем мы применим некоторые из этих результатов к сравнению различных вариантов понятия вычислимости относительно частичных функций.

1. Рекурсивные функционалы с совместными аргументами. Пусть X и Y — какие-либо классы, x — переменная на X , y — на Y ; функцию $y=f(x)$ с областью определения, включенной в X , называем функцией типа $X \rightarrow Y$. Множество всех функций типа $N \rightarrow N$ обозначаем $\mathcal{F}$ ($N^N \subset \mathcal{F}$). Далее $a, b, k, l, m, n, x, y, z$ — переменные на N , f и φ, ψ (возможно, с индексами) — на N^N и $\mathcal{F}$ соответственно. Если v — переменная с областью изменения V , то $\bar{v}$ обозначает конечный (возможно, пустой) кортеж переменных на V . Функционал G типа $\mathcal{F}^m \times N^n \rightarrow N$ называется совместным, если для любых кортежей $\bar{\varphi} = \varphi_1, \dots, \varphi_m$, $\bar{\psi} = \psi_1, \dots, \psi_m$, $\bar{x}$ и любого y

$$\varphi_1 \equiv \psi_1 \& \dots \& \varphi_m \equiv \psi_m \& G(\bar{\varphi}, \bar{x}) \simeq y \Rightarrow G(\bar{\psi}, \bar{x}) \simeq y.$$

Множество всех совместных функционалов типа $\mathcal{F} \rightarrow N$ обозначаем $\mathcal{G}$, $F, F_0, F_1, \dots$ — переменные на $\mathcal{G}$. Символы, обозначающие переменные, будем также употреблять для обозначения произвольных констант из области изменения этих переменных

Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — примитивно-рекурсивная функция (п.р.ф.), 1-1-отображающая N^n на N при $n > 0$, $(x_1, \dots, x_n) = 0$ при $n = 0$; $[a](x)$ — общерекурсивная функция, универсальная для всех 1-местных п.р.ф. и такая, что $(x, y) = [p(x)](y)$, где p — некоторая п.р.ф. Для любых фиксированных кортежей $\bar{F} = F_1, \dots, F_k$ и $\bar{\varphi} = \varphi_1, \dots, \varphi_l$ пусть $\{z\}^{\bar{F}, \bar{\varphi}}(x)$ есть наи-

меньшая из функций q (типа $N^2 \rightarrow N$) таких, что

$$\begin{aligned} q((0, a), x) &= [a](x), \\ q((1, a, b), x) &\simeq q(q(a, x), q(b, x)), \\ q((2+m, 0), x) &\simeq F_{m+1}(\lambda y. q(x, y)) \text{ для всех } m < k, \\ q((2+k+n, 0), x) &\simeq \varphi_{n+1}(x) \text{ для всех } n < l. \end{aligned}$$

Функционал $\lambda \bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, z, \bar{x}. \{z\}^{\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}}((\bar{x}))$ записываем как $\{z\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x})$. Следуя ⁽⁴⁾, функционал или функцию G называем частично-рекурсивными (или частично-рекурсивными относительно фиксированного кортежа $\bar{F}_0, \bar{\psi}_0, \bar{f}_0$), если существует такое число $z \in N$, что $G = \lambda \bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x}. \{z\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x})$ (или $G = \lambda \bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x}. \{z\}(\bar{F}_0, \bar{\psi}_0, \bar{\psi}, \bar{f}_0, \bar{f}, \bar{x})$ соответственно). Множество X называется полурекурсивным относительно кортежа $\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}$, если полухарактеристическая функция X (равна 0 на X и не определенная вне X) частично-рекурсивна относительно $\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}$.

Теорема 1 (о функциональных подстановках). *Существуют п.р.ф. p и q такие, что для любых кортежей $\bar{F}$ длиной m и $\bar{\psi}, \bar{f}$ длиной n и любых $a, b, \bar{x}, y$*

$$\begin{aligned} \{a\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \lambda y. \{b\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, y), \bar{f}, \bar{x}) &\simeq \{p(m, n, a, b)\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x}), \\ \{a\}(\bar{F}, \lambda \psi. \{b\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \psi, \bar{f}, y), \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x}) &\simeq \{q(m, n, a, b)\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x}, y). \end{aligned}$$

Функции типа $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ называем операторами. Функция φ_0 называется наименьшей неподвижной точкой оператора H , если $H(\varphi_0) = \varphi_0$ и $(\forall \varphi) [H(\varphi) = \varphi \Rightarrow \varphi_0 \sqsubseteq \varphi]$. Оператор H называется частично-рекурсивным относительно кортежа $\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}$, если существует $z \in N$, называемое кодовым числом H , такое, что для любой ψ $H(\psi) = \lambda x. \{z\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \psi, \bar{f}, x)$.

Теорема 2 (о наименьшей неподвижной точке). *Существует п.р.ф. h со следующим свойством: если $\bar{F}$ и $\bar{\psi}, \bar{f}$ — произвольные фиксированные кортежи длиной m и n соответственно, и a — кодовое число частично-рекурсивного относительно $\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}$ оператора $H: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, то функция $\lambda x. \{h(m, n, a)\}(\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, x)$ является наименьшей неподвижной точкой оператора H .*

Из теоремы 2. в частности, следует, что класс частично-рекурсивных функционалов вида $G(\bar{F}, \bar{\psi}, \bar{f}, \bar{x})$ эффективно инвариантен относительно перестановок аргументов и введения фиктивных аргументов любых типов. (Утверждения предложения В в ⁽⁴⁾, § 2, следует из теорем 1 и 2 в определенных частных случаях.)

2. R^c -операции в пространстве Бэра. $\mathcal{P}X$ обозначает множество всех подмножеств произвольного множества X . α и β — переменные на $\mathcal{P}N$, A и B — на $\mathcal{P}\mathcal{P}N$. Φ_A есть δs -операция с базой A . $\Phi_A \leq \Phi_B$ означает, что существует п.р.ф. g такая, что $\Phi_A \{E_n\} = \Phi_B \{E_{g(n)}\}$ для любой

последовательности множеств $E_n, n \in N$. δs -операция с определяемой по ⁽³⁾, § 1, базой $R^c(A)$ обозначается R_A^c и называется R_A^c -операцией. Пусть для $v \leq \omega$

$$\begin{aligned} \bigcup_v \{E_n\} &= \bigcup \{E_n : n < v\}, & \bigcap_v \{E_n\} &= \bigcap \{E_n : n < v\}, \\ \bigcup_{(0)} \{E_n\} &= E_0 \cup \bigcap \{E_{n+1} : n < v\} \end{aligned}$$

для любой последовательности множеств $E_n, n \in N$.

Будем рассматривать N как дискретное топологическое пространство, N^N — как пространство Бэра, а пространство $\mathcal{P}^{m, n} = (N^N)^m \times N^n$ ($m+n > 0$) снабдим топологией произведения. Пусть $\lambda m. \delta_m$ есть примитивно-рекурсивное 1—1-отображение N на множество всех бэровских интервалов ($\delta_m \equiv$

$\in N^N$). Для любой $f \in N^N$ класс всех подмножеств $X \in \mathcal{N}^{m,n}$, представимых в виде

$$X = \bigcup \{ \delta_{x_1} \times \dots \times \delta_{x_m} \times \{x_{m+1}\} \times \dots \times \{x_{m+n}\} : \{x_1, \dots, x_{m+n}\} \in R \}$$

с полурекурсивным относительно f множеством $R \in N$, обозначим $\Sigma_{m,n}^f$. Пусть

$$\Sigma' = \bigcup \{ \Sigma_{m,n}^f : m+n > 0 \}, \Sigma = \bigcup \{ \Sigma' : f \in N^N \}, \Sigma = \Sigma^g,$$

где $\forall x. g_0(x) = 0$. Пусть $Sr_{m,n}(\bar{F}, \bar{f})$ обозначает класс всех полурекурсивных относительно $\bar{F}, \bar{f}$ подмножеств $X \in \mathcal{N}^{m,n}$, и

$$Sr(\bar{F}, \bar{f}) = \bigcup \{ Sr_{m,n}(\bar{F}, \bar{f}) : m+n > 0 \}.$$

Для любой δs -операции Φ_A и любого класса Ξ множеств через $\Phi_A(\Xi)$ обозначаем класс всех множеств $\Phi_A\{E_n\}$, где $\{e, n: e \in E_n\} \in \Xi$. Таким образом, $R_A^c(\Sigma)$ и $R_A^c(\Sigma)$ суть классы всех R_A^c - и эффективных R_A^c -подмножеств пространств $\mathcal{N}^{m,n}$. Каждому $A \in \mathcal{PN}$ поставим в соответствие функционал L_A , определяемый так: $L_A(\varphi) \simeq 0$, если $(\exists \alpha \in A) (\forall n \in \alpha) [\varphi(n) \simeq 0]$; иначе $L_A(\varphi)$ не определено.

Теорема 3. Для любого $A (\in \mathcal{PN})$ такого, что $\bigcap_2^0 \leq R_A^c$, и любой $f \in N^N$

$$R_A^c(\Sigma') = Sr(L_A, f).$$

Включение $\subseteq$ доказывается, исходя из определения R_A^c -операции в $(^3)$, с помощью теорем 2 и 1. Обратное включение следует из теоремы 1 в $(^3)$, распространенной на функционалы $\{a\}(F, \bar{\varphi}, x)$.

Рекурсивную характеристику классов $R_A^c(\Sigma)$ и $R_A^c(\Sigma)$ дает

Следствие. Если $\bigcap_2^0 \leq R_A^c$, то:

а) $R_A^c(\Sigma) = Sr(L_A)$;

б) $R_A^c(\Sigma) = \bigcup \{ Sr(L_A, f) : f \in N^N \}$.

Пример. При $A = \{N\}$ $R_A^c(\Sigma) = \Pi_1^1$, $R_A^c(\Sigma) = \Pi_1^1$, и из следствия теоремы 3 вытекает, что множество $X \in N^N$ тогда и только тогда является (классическим) CA -множеством, когда X полурекурсивно относительно $L_{\{N\}}$, f при какой-либо $f \in N^N$.

Теорема 3 в $(^3)$ является частным случаем утверждения а) следствия теоремы 3. Из этого же утверждения а) вытекает полученная в $(^2)$, 7.5а и § 8, рекурсивная характеристика множеств класса $\Pi_1^{R^*\Gamma}$ (что доказывается вполне аналогично доказательству теоремы 4 в $(^3)$ и при условии $\bigcup_2 \leq \Gamma$ вместо несколько более ограничивающего условия $\bigcup \geq \Gamma$ в $(^2)$).

3. R^c -операции в обобщенном пространстве Бэра. Функцию $\Gamma: \mathcal{PN} \rightarrow \mathcal{PN}$ назовем расширяющей, если $(\forall \alpha) [\alpha \in \Gamma(\alpha)]$. Для любой расширяющей $\Gamma: \mathcal{PN} \rightarrow \mathcal{PN}$, множества α и порядкового числа v определим по индукции множества α_v : $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{v+1} = \Gamma(\alpha_v)$, $\alpha_v = \bigcup \{ \alpha_\tau : \tau < v \}$ при предельном v ; пусть v_0 есть наименьшее v , для которого $\alpha_{v+1} = \alpha_v$, и $St_\Gamma(\alpha) = \alpha_{v_0}$. Функционал L_A при $A = \{\{0\}, \{1\}\}$ обозначаем S_2 .

Теорема 4. Пусть $\Gamma: \mathcal{PN} \rightarrow \mathcal{PN}$ — монотонная (в отношении $\subseteq$) функция и множество $\{\psi, x: x \in \Gamma(\psi^{-1}(\{0\}))\}$ полурекурсивно относительно некоторого кортежа $\bar{F}, \bar{\varphi}$. Пусть $\Gamma^+(\alpha) = \alpha \cup \Gamma(\alpha)$.

Тогда множество $\{\psi, x: x \in St_\Gamma(\psi^{-1}(\{0\}))\}$ полурекурсивно относительно $S_2, \bar{F}, \bar{\varphi}$.

Доказательство основано на теореме 2.

Следствие. Для любого $A \in \mathcal{PN}$ функционал $L_{R^c(A)}$ частично-рекурсивен относительно S_2, L_A .

Пусть $\mathcal{K}$ есть множество всех конечных функций из $\mathcal{F}$, для любой $\kappa \in \mathcal{K}$ $d_\kappa = \{\varphi: \kappa \in \varphi\}$ и $D = \{d_\kappa: \kappa \in \mathcal{K}\}$. Пусть $lt.d_m$ — примитивно-рекурсивное 1—1-отображение N на D . Множество $\mathcal{F}$ с топологией, задаваемой базой D , называется обобщенным пространством Бэра. Классы $\hat{\Sigma}^\psi$ и $\hat{Sg}(\bar{F}, \bar{\psi})$ подмножеств пространств $\mathcal{F}^m \times N^n$ ($m+n > 0$) определяются так же, как классы Σ^f и $Sg(\bar{F}, \bar{f})$ с заменой N^N , δ_m и f на $\mathcal{F}$, d_m и ψ соответственно. Пусть $\Sigma = \Sigma^\emptyset$.

Теорема 5. Для любой $\psi \in \mathcal{F}$ и любого A такого, что $\bigcap_2^{(0)} \leq R_A^c$ и функционал S_2 частично-рекурсивен относительно L_A ,

$$R_A^c(\hat{\Sigma}^\psi) = \hat{Sg}(L_A, \psi).$$

Следствие. $\hat{\Sigma} = \hat{Sg}(S_2)$.

4. Две версии относительной рекурсивности. Обозначим через $\mathcal{R}^\psi$ и $\mathcal{A}^{\bar{F}, \bar{\psi}}$ классы всех (возможно, частичных) натурально-числовых функций;

а) частично-рекурсивных относительно ψ по Клини — Майхиллу (⁵, ⁶).

б) частично-рекурсивных относительно $\bar{F}, \bar{\psi}$ по определению п. 1 (или — эквивалентно (⁷) — вычислимых по Тьюрингу относительно $\bar{F}, \bar{\psi}$).

Как известно (⁵), $\mathcal{R}^f = \mathcal{A}^f$ для любой $f \in N^N$. Следующие теоремы доказываются с помощью следствий теорем 4 и 5.

Теорема 6. Для любой $\psi \in \mathcal{F}$ $\mathcal{A}^{S_2, \psi} \subseteq \mathcal{R}^\psi$, и существует частичная функция $\chi \in \mathcal{F}$ такая, что $\mathcal{A}^{S_2, \chi} \neq \mathcal{R}^\chi$.

Теорема 7. Для любой $\psi \in \mathcal{F}$ класс $\mathcal{R}^\psi$ совпадает с классом всех тех натурально-числовых функций, чьи графики полурекурсивны относительно S_2, ψ .

Следствие. $\mathcal{R}^\psi = \mathcal{A}^{S_2, \psi}$ тогда и только тогда, когда каждая натурально-числовая функция с полурекурсивным относительно S_2, ψ графиком принадлежит $\mathcal{A}^{S_2, \psi}$.

Институт кибернетики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
18 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Ляпунов, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 6, 195 (1957). ² P. G. Hinman, Trans. Am. Math. Soc., v. 142, 111 (1969). ³ В. И. Амстиславский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 38, № 6, 1221 (1974). ⁴ P. Aczel, Israel J. Math., v. 8, № 4, 309 (1970). ⁵ С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. ⁶ J. Myhill, Proc. Am. Math. Soc., v. 12, 519 (1961). ⁷ В. И. Амстиславский, Алгебра и логика, т. 12, № 5, 497 (1973).