

С. А. БОГАТЫЙ

О СОХРАНЕНИИ ШЕЙПОВ ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 IV 1975)

На симпозиуме по общей топологии в Херцег-Нови К. Борсуком ⁽¹⁾ была поставлена следующая проблема: верно ли, что $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$, если при отображении $* f: X \rightarrow Y$ шейпы $\text{Sh}(f^{-1}(y)) = 0$ для всех $y \in Y$?

Этот вопрос решен положительно в предположении конечномерности компактов X и Y Р. Шером ⁽²⁾ и автором ⁽³⁾. Поскольку построен пример, решающий проблему Борсука в общем виде отрицательно, то представляется целесообразным дать положительное решение при следующих предположениях (условие $\text{Sh}(f^{-1}(y)) = 0$ сильнее условия $f^{-1}(y) \in AC^\infty$ ⁽⁴⁾ и $\text{Fd } X \leq \dim X$ ⁽¹⁾):

1) замыкание $\bar{S}$ объединения S всех невырожденных полных прообразов $f^{-1}(y)$ конечномерно, а компакт Y счетномерен;

2) все полные прообразы аппроксимативно связаны в размерности n ($f^{-1}(y) \in AC^n$), а фундаментальные размерности $\text{Fd } X$ и $\text{Fd } Y$ компактов X и Y не превосходят n ;

3) все полные прообразы аппроксимативно связаны во всех размерностях ($f^{-1}(y) \in AC^\infty$), один из компактов — X или Y — подвижен, а фундаментальная размерность другого конечна.

1. З а м е ч а н и е 1. Для всякого компакта X , лежащего в гильбертовом кубе Q существуют такие призмы Π_k , что $X = \bigcap \Pi_k$ и $\Pi_{k+1} \subset \text{Int } \Pi_k$ при каждом $k = 1, 2, 3, \dots$ (⁽⁵⁾, стр. 119). Спектр $\{\Pi_k, i_{kk'}\}$, где $i_{kk'}: \Pi_k \subset \Pi_{k'}$ — вложение, обозначим через $\Pi(X)$. Ясно, что $X = \lim_{\leftarrow} \Pi(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существует вложение $i: \bar{S} \rightarrow Q^n$ в некоторый куб Q^n ; в нем найдутся такие полиэдры P_k , что $\bar{S} = \bigcap P_k$ и $P_{k+1} \subset P_k$ при всех k .

Пусть $Z = X \cup Q^n$ — компакт, полученный склеиванием по i (⁽⁵⁾, стр. 131). Z можно вложить в гильбертов куб Q . Рассмотрим систему $\Pi(X)$ из замечания 1, компакты $Y_k = \Pi_k \cup Y$, отображения $f_k: \Pi_k \rightarrow Y_k$ и вложения $j_{kk'}: Y_k \subset Y_{k'}$.

Таким образом, мы имеем спектр $\underline{Y} = \{Y_k, j_{kk'}\}$ с пределом $\bigcap Y_k = Y$. Так как $\bar{S} = \bigcap P_k \subset X = \bigcap \Pi_k$, то для любого k найдется номер $\varphi(k)$, что $P_{\varphi(k)} \subset \Pi_k$. Пусть $B_k = f_k(P_{\varphi(k)})$. Во-первых, B_k счетномерно: ведь $B_k = (Y \cap B_k) \cup (B_k \setminus Y)$, где $Y \cap B_k$ счетномерно, а $B_k \setminus Y$ конечномерно. Во-вторых, $\dim B_k \leq \dim P_{\varphi(k)}$. В противном случае в B_k нашлось бы такое конечномерное замкнутое множество D_k , что $\dim D_k > \dim P_{\varphi(k)}$ и по теореме Дайера ⁽⁶⁾ мы имели бы $\dim f_k^{-1}(D_k) \geq \dim D_k > \dim P_{\varphi(k)}$.

В силу доказанного и следствия 14 из ⁽³⁾ компакт $B_k \in \text{ANR}$. Следовательно, к тройке компактов Π_k , $P_{\varphi(k)}$ и B_k можно применить теорему Уайтхеда о склеивании ANR-компактов (⁽³⁾, стр. 132) и получить, что $Y_k = \bigcap \Pi_k \cup Y = \bigcap \Pi_k \cup B_k$, где $f_k' = f_k|_{P_{\varphi(k)}}$ является ANR-компактом. Но тогда по следствию 13 из ⁽³⁾ каждое отображение $f_k: \Pi_k \rightarrow Y_k$ является гомотопической эквивалентностью.

* Мы рассматриваем только непрерывные отображения компактов.

2. Теорема Смейла (⁷). Пусть компакт $\Pi' \in LC^{n+1}$, а его замкнутое множество $Y \in LC^n$; тогда для всякой окрестности U компакта Y существует такая меньшая окрестность V , что для любого отображения $h': P \rightarrow V$ найдется отображение $h: P \rightarrow Y$, гомотопное h' в U , при условии, что P — полиэдр размерности $\leq n+1$.

Лемма 1. Пусть в компакте Π' задан LC^n -подкомпакт Y , тогда у него найдется такая окрестность U , что отображения $g', g: P \rightarrow Y$, гомотопные в U , гомотопны и в Y , при условии, что P — полиэдр размерности $\leq n$.

Доказательство. Пусть λ — число Лефшеца (⁸), стр. 82), подбранное к числу $\varepsilon = \text{diam } Y$. Тогда $U = O(Y, 3^{-1}\lambda)$.

Лемма 2. Пусть $Y = \lim \{\Pi'_k, j'_{kk'}\} = \lim \{Y_k, j_{kk'}\}$, причем $Y_k \subset U_k \subset \Pi'_k$, где Y_k замкнуто, а U_k открыто в компакте Π'_k , и $j_{kk'} = j'_{kk'}|_{Y_k}$. Пусть также $\text{Fd } Y \leq n$, $\Pi'_k \in \text{ANR}$ и $Y_k \in LC^n$. Тогда найдутся такая возрастающая последовательность номеров $\varphi(k) \geq k$ и такие отображения $g'_k: \Pi_{\varphi(k)} \rightarrow P_k$ и $h_k: P_k \rightarrow Y_k$, что $j'_{\varphi(k)} \Pi'_{\varphi(k)} \subset U_k$ и $j'_{\varphi(k)} \simeq h_k \circ g'_k$ в U_k при всех k , где P_k — полиэдр размерности $\leq n$.

Доказательство. Для окрестности U_k найдется меньшая окрестность V_k компакта Y_k , удовлетворяющая утверждению теоремы Смейла, — ведь $\Pi'_k \in \text{ANR}$ и $Y_k \in LC^n$. Найдется такой номер $\psi(k) \geq k$, что $j'_{\psi(k)} \Pi'_{\psi(k)} \subset V_k$. Можно считать, что $\psi(k') \geq \psi(k)$, если $k' \geq k$. Так как $\text{Fd } Y \leq n$, то существует такой компакт Z , что $\dim Z \leq n$ и $\text{Sh } Z \geq \text{Sh } Y$. Поэтому из теоремы Фрейденшталя (⁹) и эквивалентности теории Борсука и Мардешича — Сегала (¹⁰) вытекает существование таких полиэдров P_k с $\dim P_k \leq n$, возрастающей функции $\varphi(k) \geq \psi(k)$ и $g'_k: \Pi_{\varphi(k)} \rightarrow P_k$ и $h'_k: P_k \rightarrow \Pi'_{\varphi(k)}$, что $j'_{\varphi(k)} \Pi'_{\varphi(k)} \simeq h'_k \circ g'_k$ в $\Pi'_{\varphi(k)}$. Значит, $j'_{\varphi(k)} \simeq j'_{\varphi(k)} \circ h'_k \circ g'_k$ в V_k . В силу выбора окрестности V_k существует такое отображение $h_k: P_k \rightarrow Y_k$, что $h_k \simeq j'_{\varphi(k)} \circ h'_k$ в U_k . Значит, $j'_{\varphi(k)} \simeq h_k \circ g'_k$ в U_k .

Теорема 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — такое отображение компакта X на Y с $\text{Fd } Y \leq n$, что $f^{-1}(y) \in AC^n$ для всех точек $y \in Y$. Тогда f будет шейповым r -морфизмом, в частности, $\text{Sh } Y \leq \text{Sh } X$.

Доказательство. Рассмотрим систему $\Pi(X)$ из замечания 1. Возьмем на $\Pi_k \setminus X$ тривиальное разбиение, получим отображение $f_k: \Pi_k \rightarrow Y_k = \Pi_k \cup Y$. Как и в доказательстве теоремы 1, $Y = \bigcap Y_k$. Построим такие призмы Π'_k , что $Y_k \subset \text{Int } \Pi'_k \subset \text{Int } \Pi'_{k-1} \cap O(Y_k, k^{-1})$. По теореме 4 из (³) каждое $Y_k \in LC^n$, поэтому найдется окрестность U_k компакта Y_k в Π'_k , удовлетворяющая утверждению леммы 1. Компакт Y , спектры $\Pi(Y) = \{\Pi'_k, j'_{kk'}\}$ и $\underline{Y} = \{Y_k, j_{kk'}\}$, где $j_{kk'}$ и $j'_{kk'}$ — вложения, и множества U_k удовлетворяют условиям леммы 2; поэтому существуют функция φ , полиэдры P_k размерности $\leq n$ и отображения g'_k и h_k , удовлетворяющие утверждению леммы 2. Если теперь в спектрах $\Pi(X)$, $\Pi(Y)$ и $\underline{Y}$ оставить лишь те пространства, номера которых имеют вид $\varphi^k(1)$, и перенумеровать пространства, то $\varphi(k) = k+1$.

Построим теперь шейпово отображение $\underline{g} = (\varphi, g_k)$ (где $\varphi: N \rightarrow N$ и $g'_k: \Pi'_{\varphi(k)} \rightarrow \Pi_k$), правое обратное к шейпову отображению $\underline{f} = (\text{id}_N, f_k)$, порожденному отображением f . Положим $\varphi(k) = k+1$. По теореме 4 из (³) существует такое отображение $g''_k: P_k \rightarrow \Pi_k$, что отображения $f_k \circ g''_k$ и h_k гомотопны. Положим $g_k = g''_k \circ g'_k: \Pi_{k+1} \rightarrow \Pi_k$. Покажем, что $\underline{g} = (\varphi, g_k)$ является шейповым отображением в смысле (¹⁰). Пусть $k' \geq k$. По построению отображений g_k имеем $j'_{kk+1} \simeq f_k \circ g_k$ в U_k , поэтому в U_k

$$f_k \circ i_{kk'} \circ g''_k = j'_{kk'} \circ f_{k'} \circ g''_{k'} \simeq j'_{kk'} \circ h_{k'} \simeq f_k \circ g_k \circ j'_{k+1 k'} \circ h_{k'}.$$

Из выбора окрестности U_k следует, что отображения $f_k \circ i_{kk'} \circ g_k''$ и $f_k \circ g_k \circ j_{k+1k'} \circ h_k$ гомотопны и по пространству Y_k . Тогда по теореме 4 из (3) отображения $i_{kk'} \circ g_k''$ и $g_k \circ f_{k+1k'} \circ h_k$ гомотопны в Π_k . Следовательно, и отображения $i_{kk'} \circ g_k' = i_{kk'} \circ g_k'' \circ g_k'$ и $g_k \circ j_{k+1k'} \simeq g_k \circ j_{k+1k'} \circ h_k \circ g_k'$ гомотопны в Π_k . Гомотопность шейповых отображений $\underline{e}_{\Pi(X)}$ и $\underline{j} \circ \underline{g}$ вытекает из того, что $j_{kk'}' \simeq f_k \circ g_k$.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что в предположении $\text{Fd } X \leq n$ $\underline{g}$ является и левым обратным к $\underline{f}$. Так как $\text{Fd } X \leq n$, то найдем такую возрастающую функцию $\chi(k) \geq k$ и такие отображения $g_k': \Pi_{\chi(k)} \rightarrow P_k'$ и $h_k': P_k' \rightarrow \Pi_k$, где P_k' — полиэдр размерности $\leq n$, что $i_{h\chi(k)} \simeq h_k' \circ g_k'$ в Π_k . Следовательно, в U_k мы имеем

$$f_k \circ i_{h\chi(k)+1} \circ h_{k+1}' = j_{h\chi(k)+1}' \circ f_{h\chi(k)+1} \circ h_{k+1}' \simeq f_k \circ g_k \circ f_{h\chi(k)+1} \circ h_{k+1}'.$$

Тогда эти отображения гомотопны и по пространству Y_k , и из теоремы 4 из (3) вытекает, что отображения $i_{h\chi(k)+1} \circ h_{k+1}'$ и $g_k \circ f_{h\chi(k)+1} \circ h_{k+1}'$ гомотопны в Π_k . Следовательно, в Π_k имеют место гомотопии

$$i_{h\chi(k)+1} \simeq i_{h\chi(k)+1} \circ h_{k+1}' \circ g_{h\chi(k)+1}' \simeq g_k \circ f_{h\chi(k)+1} \circ h_{k+1}' \circ g_{h\chi(k)+1}' \simeq g_k \circ f_{h\chi(k)+1} \circ i_{h\chi(k)+1} \chi(h+1),$$

что и доказывает гомотопность $\underline{e}_{\Pi(X)}$ и $\underline{g} \circ \underline{f}$.

За. Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{X}$ подвижно и $\text{Fd } Y < \infty$. Нужно показать, что морфизм $\underline{g}$ является левым обратным к $\underline{f}$. Так как X подвижен, то для каждого k существует такой номер $\psi(k) \geq k$ и для $k' \geq \psi(k)$ отображения $r_{k'\psi(k)}: \Pi_{\psi(k)} \rightarrow \Pi_{k'}$, что $i_{k\psi(k)} \simeq i_{k\psi(k)} \circ r_{k'\psi(k)}$. Так как $\Pi_{\psi(k)}$ является призмой, то существует такой полиэдр P_k' размерности $\dim P_k' = n_k$, что $\Pi_{\psi(k)}$ гомеоморфно $P_k' \times Q$. По числу n_{k+1} построим окрестность U_k' компакта Y_k в Π_k' , о которой говорится в лемме 1, ведь по следствию 5 из (3) $Y_k \in LC^\infty$. Тогда существует такой номер $k' \geq \psi(k+1)$, что $j_{kk'}'(\Pi_{k'}') \subset U_k'$. Следовательно, в U_k' имеет место цепочка гомотопий

$$\begin{aligned} f_k \circ i_{h\psi(k)+1} &\simeq f_k \circ i_{h\psi(k)+1} \circ r_{k'\psi(k)+1} = j_{h\psi(k)+1}' \circ f_{h\psi(k)+1}' \circ r_{k'\psi(k)+1} \simeq \\ &\simeq j_{kk'}' \circ f_{h\psi(k)+1}' \circ g_{h\psi(k)+1}' \circ r_{k'\psi(k)+1} = f_k \circ i_{h\psi(k)+1}' \circ g_{h\psi(k)+1}' \circ r_{k'\psi(k)+1}. \end{aligned}$$

Тогда отображения цепочки гомотопны в Y_k и по следствию 5 из (3) отображения $i_{h\psi(k)+1}$ и $i_{h\psi(k)+1} \circ g_{h\psi(k)+1}' \circ f_{h\psi(k)+1}' \circ r_{k'\psi(k)+1}$ гомотопны в пространстве Π_k . Но

$$\begin{aligned} i_{h\psi(k)+1} \circ g_{h\psi(k)+1}' \circ f_{h\psi(k)+1}' \circ r_{k'\psi(k)+1} &\simeq g_k \circ j_{h\psi(k)+1}' \circ f_{h\psi(k)+1}' \circ r_{k'\psi(k)+1} = \\ &= g_k \circ f_{h\psi(k)+1} \circ i_{h\psi(k)+1}' \circ r_{k'\psi(k)+1} \simeq g_k \circ f_{h\psi(k)+1} \circ i_{h\psi(k)+1} \chi(h+1). \end{aligned}$$

Итак, $i_{h\psi(k)+1} \simeq g_k \circ f_{h\psi(k)+1} \circ i_{h\psi(k)+1} \chi(h+1)$, что и доказывает гомотопность $\underline{e}_{\Pi(X)}$ и $\underline{g} \circ \underline{f}$.

Доказательство следующей леммы мы опускаем.

Лемма 3. Пусть в начальных условиях леммы 2 Y подвижно, $\Pi_k' \in \text{ANR}$ и $Y_k \in LC^\infty$. Тогда найдутся такая возрастающая последовательность номеров $\varphi(k) \geq k$ и такие отображения $g_k': \Pi_{\varphi(k)}' \rightarrow Y_k$, что

$$j_{h\varphi(k)}' \Pi_{\varphi(k)}' \subset U_k \text{ и } j_{h\varphi(k)}' \simeq g_k' \text{ в } U_k.$$

36. Итак, пусть теперь компакт Y подвижен и $\text{Fd } X < \infty$. Повторив начало доказательства теоремы 4, получим системы $\Pi(X)$ и $\Pi(Y)$, семейство подкомпактов $Y_k \subset \Pi_k'$ и отображений $f_k: \Pi_k \rightarrow Y_k$. По числу $n = \text{Fd } X$ построим для каждого k окрестность U_k компакта Y_k в Π_k' , о которой говорится в лемме 1. Если теперь «воспользоваться» леммой 3, то получим такие спектры $\Pi(X)$ и $\Pi(Y)$, что $j_{h\varphi(k)+1}'(\Pi_{\varphi(k)+1}') \subset U_k$ и $j_{h\varphi(k)+1}'$ гомотопны

в U_k некоторому отображению $g'_k: \Pi'_{k+1} \rightarrow Y_k$, а $i_{hk+1} \simeq h_k \circ h'_k$, где $h'_k: \Pi_{k+1} \rightarrow P_k$, $h_k: P_k \rightarrow \Pi_k$ и $\dim P_k \leq n$. Так как Π'_{k+1} является ANR-компактом, то $\Delta \Pi'_{k+1} < \infty$ и по следствию 5 из (3) существует такое отображение $g''_k: \Pi'_{k+1} \rightarrow \Pi_k$, что $g'_k \simeq f_k \circ g''_k$ в Y_k . Положим $\varphi(k) = k + 3$ и $g_k = g''_k \circ j'_{k+1, k+3}$. Покажем, что $g = (\varphi, g_k)$ является шейповым отображением. Пусть $k' > k$. Тогда $f_k \circ i_{kk'} \circ g'''_k = j'_{kk'} \circ f_k \circ g''_k \simeq j'_{kk'+1} \simeq f_k \circ g''_k \circ j'_{k+1, k'+1}$ в U_k . Следовательно, $f_k \circ i_{kk'} \circ g''_k \circ f'_{k'+1} \circ h'_{k'+1} \simeq f_k \circ g''_k \circ j'_{k+1, k'+1} \circ f'_{k'+1} \circ h'_{k'+1}$ в U_k и в Y_k . Тогда по следствию 5 из (3) отображения $i_{kk'} \circ g''_k \circ f'_{k'+1} \circ h'_{k'+1} \circ h'_{k'+1} \circ g''_{k'+2} \simeq i_{kk'} \circ g''_k \circ f'_{k'+1} \circ i_{k'+1, k'+2} \circ g''_{k'+2} \simeq i_{kk'} \circ g''_k \circ j'_{k'+1, k'+2} \circ f'_{k'+2} \circ g''_{k'+2} \simeq i_{kk'} \circ g''_k \circ j'_{k'+1, k'+2} \circ j'_{k'+2, k'+3} = i_{kk'} \circ g''_k$ и $g''_k \circ j'_{k+1, k'+1} \circ f'_{k'+1} \circ h'_{k'+1} \circ h'_{k'+1} \circ g''_{k'+2} \simeq g''_k \circ j'_{k+1, k'+1} \circ j'_{k'+1, k'+3} = g''_k \circ j'_{k+3, k'+3}$ гомотопны по пространству Π_k . Так как $j_{k, k+3} \simeq f_k \circ g''_k \circ j_{k+1, k+3} = f_k \circ g_k$, то шейповы отображения $e_{\Pi(X)}$ и $f \circ g$ гомотопны. Докажем теперь гомотопность шейповых отображений $e_{\Pi(X)}$ и $g \circ f$. Действительно, отображения $f_k \circ i_{k, k+1} \circ g_{k+1} = j'_{k, k+1} \circ f_{k+1} \circ h_{k+1}$ и $f_k \circ g''_k \circ f_{k+1} \circ h_{k+1}$ гомотопны в U_k , следовательно, они гомотопны в Y_k и по следствию 5 из (3) $i_{h, h+1} \circ h_{h+1}$ и $g''_h \circ f_{h+1} \circ h_{h+1}$ гомотопны в Π_h . Тогда и отображения $i_{k, k+3} \simeq i_{k, k+1} \circ h_{k+1} \circ h'_{k+1} \circ i_{k+2, k+3}$ и $g_k \circ f_{k+3} = g''_k \circ j'_{k+1, k+3} \circ f_{k+3} = g''_k \circ f_{k+1} \circ i_{k+1, k+3} \simeq g''_k \circ f_{k+1} \circ h_{k+1} \circ h'_{k+1} \circ i_{k+2, k+3}$ гомотопны.

В заключение автору приятно выразить свою благодарность проф. Ю. М. Смирнову за ценные замечания и беседы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ K. Borsuk, Proc. Intern. Symp. Top. Herceg-Novi 1968, Beograd, 1969, p. 98, 343.
² R. B. Sher, Gen. Top. Appl., v. 2, № 2, 75 (1972). ³ С. Бозарый, Fund. Math., v. 84, № 3, 209 (1974). ⁴ K. Borsuk, ibid., v. 67, № 2, 265 (1970). ⁵ К. Борсух, Теория ретрактов, М., 1971. ⁶ E. Dyer, Ann. Math., v. 63, № 1, 15 (1956). ⁷ S. Smale, Proc. Am. Math. Soc., v. 8, № 3, 604 (1957). ⁸ S. Lefschetz, Topics in Topology, Ann. Math. Studies, 1942. ⁹ H. Freudenthal, Comp. Math., v. 4, 145 (1937). ¹⁰ S. Mardešić, I. Segal, Fund. Math., v. 72, № 1, 61 (1971).