

В. И. БУРЕНКОВ

# О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ С СОХРАНЕНИЕМ И С УХУЖДЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 17 IV 1975)

В настоящей заметке изучается вопрос о продолжении функций из пространств Соболева за пределы области определения. Мы будем рассматривать два варианта этих пространств  $W_p^l(\Omega_1)$  и  $W_p^{l, \dots, l}(\Omega)$ , характеризующиеся конечностью норм

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|f\|_{W_p^{l, \dots, l}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^l \|D_i^l f\|_{L_p(\Omega)};$$

здесь  $\Omega$  — открытое множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ ;  $1 \leq p \leq \infty$ ;  $D_i^l f = \partial^l f / \partial x_i^l$  — обобщенная производная порядка  $l$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i$  — неотрицательные целые числа,  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Будем исследовать открытые множества  $\Omega$ , граница которых принадлежит классу  $\text{Lip } \gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ . Простейшим подобным множеством является область вида

$$\Omega = \{x \in E_n, x_n < \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\}, \quad (1)$$

где функция  $\varphi(\bar{x})$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , удовлетворяет условию Липшица с показателем  $\gamma$ :

$$|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| \leq M |\bar{x} - \bar{y}|^\gamma, \quad \bar{x}, \bar{y} \in E_{n-1}. \quad (2)$$

Такие области, а также области, получаемые из них перестановкой координат в (1), будем называть специальными областями класса  $\text{Lip } \gamma$ . Будем говорить, что  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } \gamma$ , если существуют такие открытые параллелепипеды с границами, параллельными координатным плоскостям  $U_1, \dots, U_n$ , что  $\Gamma(\Omega) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$  и для любого  $i$  существует такая специальная область  $\Omega_i$

класса  $\text{Lip } \gamma$  с константой, не превышающей  $M$ , что  $U_i \cap \Omega = U_i \cap \Omega_i$ .

Если граница области  $\Omega$  принадлежит классу  $\text{Lip } 1$ , то любую функцию  $f \in W_p^l(\Omega)$  можно продолжить с сохранением класса на все пространство, т. е. построить такую функцию  $\Phi \in W_p^l(E_n)$ , что  $\Phi(x) = f(x)$  для  $x \in \Omega$ . Для областей с достаточно гладкой границей этот факт при  $1 \leq p \leq \infty$  установлен С. М. Никольским <sup>(1)</sup> и В. М. Бабиным <sup>(2)</sup>, которые использовали метод продолжения Хестенса <sup>(3)</sup> (комбинация отражений и растяжений). Кальдерон <sup>(4)</sup> предложил метод продолжения с помощью интегрального представления, позволивший доказать этот факт при  $1 < p < \infty$  для случая  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } 1$ . Стейн <sup>(5)</sup> получил этот результат для любых  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } 1$ . Он разработал метод продолжения, использующий регуляризованное расстояние и осреднение.

Если оператор  $T$  действует из одного функционального пространства  $Z_1(\Omega_1)$  в другое  $Z_2(\Omega_2)$ ,  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset E_n$ , и  $(Tf)(x) = f(x)$ ,  $x \in \Omega_1$ , для любых  $f \in Z_1(\Omega_1)$ , то будем говорить, что  $T$  — оператор продолжения. Мы дополним результаты упомянутых выше авторов, построив оператор продолжения  $T$ , обладающий тем свойством, что  $(Tf)(x) \in C^\infty(E_n \setminus \bar{\Omega})$ , причем поря-

док роста производных  $D^\alpha(Tf)(x)$ ,  $|\alpha| > l$ , при подходе к границе  $\Gamma(\Omega)$  является наилучшим. Обозначим через  $\rho(x)$  расстояние от  $x \in E_n \setminus \bar{\Omega}$  до  $\Gamma(\Omega)$ .

В приводимых ниже неравенствах через  $c_1, c_2, \dots$  будем обозначать постоянные, не зависящие от входящих в эти неравенства функций.

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Существует такой линейный ограниченный оператор продолжения  $T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^l(E_n)$ , что  $(Tf)(x) \in C^\infty(E_n \setminus \bar{\Omega})$  и при  $|\alpha| > l$

$$\|\rho(x)^{|\alpha|-l} D^\alpha(Tf)(x)\|_{L_p(E_n \setminus \bar{\Omega})} \leq c_1 \|f\|_{W_p^l(\Omega)}. \quad (3)$$

Множитель  $\rho(x)^{|\alpha|-l}$  в (3) нельзя заменить на  $\rho(x)^{|\alpha|-l-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Это следует из теоремы вложения для весовых пространств, принадлежащей С. В. Успенскому<sup>(6)</sup>. В случае продолжения функций с подпространства  $E_m$  на  $E_n$  вопрос о бесконечно дифференцируемом продолжении с наилучшим порядком роста производных рассматривался в работах<sup>(7-10)</sup>.

Для пространств  $W_p^{l, \dots, l}(\Omega)$  вопрос о продолжении на  $E_n$  с сохранением класса тесно связан с вопросом об оценке смешанных производных. Для областей с достаточно гладкой границей этот вопрос при  $1 < p < \infty$  рассматривался Ю. К. Солнцевым<sup>(11)</sup>. Если  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } 1$ ,  $1 < p < \infty$ , то теорема продолжения для этих пространств доказана Смитом<sup>(12)</sup>. Для анизотропных соболевских пространств теорема продолжения при  $1 < p < \infty$  получена О. В. Бесовым и В. П. Ильиным<sup>(13)</sup>. Из теорем продолжения с сохранением класса для пространств  $W_p^l(\Omega)$  и  $W_p^{l, \dots, l}(\Omega)$  и соответствующего результата для  $E_n$  следует, что при  $1 < p < \infty$ ,  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } 1$  эти пространства совпадают и нормы этих пространств эквивалентны.

Мы распространим теорему о продолжении для пространств  $W_p^{l, \dots, l}(\Omega)$  на случай  $p=1$  и  $p=\infty$  (когда они уже не совпадают с  $W_p^l(\Omega)$ ).

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Существует линейный ограниченный оператор продолжения  $T: W_p^{l, \dots, l}(\Omega) \rightarrow W_p^{l, \dots, l}(E_n)$ , причем такой, что  $(Tf)(x) \in C^\infty(E_n \setminus \bar{\Omega})$  и при  $|\alpha| > l$

$$\|\rho(x)^{|\alpha|-l} D^\alpha(Tf)(x)\|_{L_p(E_n \setminus \bar{\Omega})} \leq c_2 \|f\|_{W_p^{l, \dots, l}(\Omega)}.$$

Если  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , то, как показывают примеры, теорема продолжения с сохранением класса перестает быть верной. В связи с этим мы исследуем вопрос о том, с каким минимальным «ухудшением класса» можно продолжить функции из рассматриваемых пространств за пределы области определения.

**Теорема 3.** Пусть  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } \gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ ;  $1 \leq p \leq \infty$ . Существует линейный ограниченный оператор продолжения  $T: W_p^l(\Omega) \rightarrow W_p^{[\gamma l]}(E_n)$ , причем такой, что если

$$|\alpha| + (\gamma - 1)\alpha_i \leq \gamma l, \quad i=1, \dots, n, \quad (4)$$

то

$$\|D^\alpha(Tf)\|_{L_p(E_n)} \leq c_3 \|f\|_{W_p^l(\Omega)};$$

кроме того,  $(Tf)(x) \in C^\infty(E_n \setminus \bar{\Omega})$  и при  $v = \max_{i=1, \dots, n} \{\alpha_i/\gamma + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_n/\gamma - l\}$

$$\|\rho(x)^v D^\alpha(Tf)(x)\|_{L_p(E_n \setminus \bar{\Omega})} \leq c_4 \|f\|_{W_p^l(\Omega)}.$$

Для получения аналогичной теоремы для пространств  $W_p^{l, \dots, l}(\Omega)$  предварительно потребуются следующая теорема об оценке смешанных и промежуточных производных.

Теорема 4. Пусть  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } \gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , и пусть  $f \in W_p^{l_1, \dots, l_n}(\Omega)$ . Если  $1 < p < \infty$  и  $\alpha$  удовлетворяет системе (4), то

$$\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \leq c_5 \|f\|_{W_p^{l_1, \dots, l_n}(\Omega)}. \quad (5)$$

Если в (4) во всех неравенствах поставить знак строгого неравенства, то (5) справедливо при  $1 \leq p \leq \infty$ .

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из интегрального представления и рассуждений, проведенных в работах (13-15). Условие (4) является неулучшаемым в том смысле, что если для некоторого  $\alpha$  хотя бы одно из неравенств (4) не выполняется, то существует такая область  $\Omega$  с границей  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } \gamma$  и такая функция  $f \in W_p^{l_1, \dots, l_n}(\Omega)$ , что  $\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} = \infty$ . Приведем соответствующий пример для  $n=2$ . Пусть  $\alpha_1 + \gamma\alpha_2 > \gamma l$ . Рассмотрим область  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in E_2, x_2 > |x_1|^\gamma\}$  и функцию  $f(x_1, x_2) = x_1^{\gamma l} x_2^\beta \mu(x_1, x_2)$ , где  $\mu(x_1, x_2) \in C_0^\infty(E_2)$ , причем  $\mu(x_1, x_2) = 1$  в некоторой окрестности начала координат. Вычисления показывают, что если  $\alpha_1 \leq [\gamma l]$  и  $\gamma l < \gamma\beta + [\gamma l] + (1+\gamma)/p \leq \alpha_1 + \gamma\alpha_2$ , то  $f(x_1, x_2) \in W_p^{l_1, l_2}(\Omega)$ , но  $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} f \notin L_p(\Omega)$ . Аналогичный пример можно построить и когда  $\alpha_1 > [\gamma l]$ .

Теорема 5. Пусть  $\Gamma(\Omega) \in \text{Lip } \gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ ;  $1 < p < \infty$ . Существует линейный ограниченный оператор продолжения  $T: W_p^{l_1, \dots, l_n}(\Omega) \rightarrow W_p^{[\gamma l_1], \dots, [\gamma l_n]}(E_n)$ , причем такой, что для  $\alpha$ , удовлетворяющих условию (4),

$$\|D^\alpha(Tf)\|_{L_p(E_n)} \leq c_6 \|f\|_{W_p^{l_1, \dots, l_n}(\Omega)}; \quad (6)$$

$(Tf)(x) \in C^\infty(E_n \setminus \bar{\Omega})$  и при  $v = \max_{i=1, \dots, n} \{\alpha_i/\gamma + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_n/\gamma - l\} > 0$

$$\|\rho(x)^v D^\alpha(Tf)(x)\|_{L_p(E_n \setminus \bar{\Omega})} \leq c_7 \|f\|_{W_p^{l_1, \dots, l_n}(\Omega)}.$$

Если  $p=1$  или  $p=\infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$

$$T: W_p^{l_1, \dots, l_n}(\Omega) \rightarrow W_p^{[\gamma l_1 - \varepsilon], \dots, [\gamma l_n - \varepsilon]}(E_n), \quad 0 < \gamma < 1,$$

и (6) выполняется для  $\alpha$ , удовлетворяющих условию (4) со строгими знаками неравенства в каждом неравенстве.

Приведенный выше пример показывает, что  $[\gamma l]$  нельзя, вообще говоря, заменить на  $[\gamma l + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , и что (6) не может выполняться для  $\alpha$ , не удовлетворяющих условию (4). Таким образом, теорема 4 является неулучшаемой в терминах рассматриваемых пространств (с целыми производными).

Основным моментом доказательства приведенных выше теорем является их доказательство для случая области вида (1), (2). Оператор продолжения строится следующим образом. Пусть  $G = E \setminus \bar{\Omega}$ ; обозначим  $G_m = \{2^{-m-1} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leq 2^{-m}\}$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Л е м м а. Существует такая последовательность неотрицательных функций  $\psi_m(x) \in C^\infty(E_n)$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , что

$$1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x) = 1, x \in G; \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x) = 0, x \notin G;$$

2)  $G = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \text{supp } \psi_m$ , причем кратность покрытия множества множествами  $\text{supp } \psi_m$  не превышает двух;

$$3) G_m \subset \text{supp } \psi_m \subset G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1}, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

4) для любого вектора  $\alpha$

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leq c_\alpha \cdot 2^{m(\bar{\alpha}/\gamma + \alpha_n)},$$

где  $c_\alpha$  зависит только от  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ .

Положим  $(Tf)(x) = f(x)$ ,  $x \in \Omega$ , и

$$(Tf)(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x) f_m(x), \quad x \in G, \quad (7)$$

где

$$f_m(x) = \int_E \omega(z) f(\bar{x} - 2^{-m/2} \bar{z}, x_n - A \cdot 2^{-m} z_n) dz; \quad (8)$$

здесь  $A$  — некоторая постоянная, зависящая только от  $M$  и  $n$ , а  $\omega(z)$  — функция, удовлетворяющая условиям

$$\omega(z) = \omega_1(z_1) \dots \omega_n(z_n), \quad \omega_i \in C_0^\infty(1/2, 1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_i(z_i) dz_i = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega_i(z_i) z_i^k dz_i = 0, \quad k=1, \dots, l, \quad i=1, \dots, n.$$

Функции (8) можно охарактеризовать как неоднородные осреднения со сдвигом функции  $f$  (необходимый сдвиг обеспечивается условием  $\omega_n(z_n) \in C_0^\infty(1/2, 1)$  и выбором постоянной  $A$ ), а функцию  $(Tf)(x)$ ,  $x \in G$ , как неоднородное осреднение функции  $f$  с переменным шагом и переменным сдвигом. Метод построения оператора продолжения  $T$  близок к методу построения оператора приближения, использованного в работе автора <sup>(14)</sup>. Идея использования бесконечного разбиения единицы для построения оператора продолжения содержится в работе <sup>(15)</sup>.

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступило  
10 I 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. М. Никольский, ДАН, т. 88, № 3, 409 (1953). <sup>2</sup> В. М. Бабиш, УМН, т. 8, № 2, 111 (1953). <sup>3</sup> M. R. Hestenes, Duke Math. J., v. 8, 183 (1941). <sup>4</sup> A. P. Calderon, Proc. Symp. Pure Math., v. 5, 33 (1961). <sup>5</sup> E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton, 1970. <sup>6</sup> С. В. Успенский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 50, 282 (1961). <sup>7</sup> Л. Д. Кудрявцев, ДАН, т. 107, № 4, 501 (1956). <sup>8</sup> Я. С. Бугров, ДАН, т. 116, № 4, 531 (1957). <sup>9</sup> С. В. Успенский, Сиб. матем. журн., т. 7, № 1, 192 (1966). <sup>10</sup> О. А. Гаврилова, Матем. заметки, т. 9, № 6, 723 (1971). <sup>11</sup> Ю. К. Солнцев, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 64, 211 (1961). <sup>12</sup> K. T. Smith, Bull. Am. Math. Soc., v. 67, 368 (1961). <sup>13</sup> О. В. Бесов, В. П. Ильин, Матем. сб., т. 75 (117), № 4, 484 (1968). <sup>14</sup> В. И. Буренков, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 131, 39 (1974). <sup>15</sup> H. Whitney, Trans. Am. Math. Soc., v. 36, 63 (1934).