

Академик АН УССР В. А. МАРЧЕНКО, И. В. ОСТРОВСКИЙ

# ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ХИЛЛА

Дифференциальная операция Штурма — Лиувилля

$$L[y] = -y'' + v(x)y \quad (1)$$

с вещественным периодическим потенциалом  $v(x) \equiv v(x+c)$  порождает в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$  самосопряженный оператор (оператор Хилла), спектр которого непрерывен и состоит из последовательности сегментов

$$[\mu_0^+, \mu_1^-], [\mu_1^+, \mu_2^-], [\mu_2^+, \mu_3^-], \dots, \quad (2)$$

где  $\mu_0^+, \mu_2^-, \mu_2^+, \dots$  — собственные значения периодической  $(y(0) = y(c), y'(0) = y'(c))$ , а  $\mu_1^-, \mu_1^+, \mu_3^-, \mu_3^+, \dots$  антипериодической  $(y(0) = -y(c), y'(0) = -y'(c))$  краевых задач, порождаемых операцией (1) на сегменте  $[0, c]$ . В настоящей работе дается описание всех последовательностей сегментов (2), которые могут быть спектрами операторов Хилла. Обратная задача для операторов Хилла рассматривалась И. В. Станкевичем <sup>(1)</sup>, но найденные им условия ее разрешимости существенно отличаются от наших.

Каждому оператору Хилла соответствует целая функция  $u(z)$ , называемая детерминантом Хилла, для которой множество корней уравнения  $u^2(z) = 1$  совпадает с множеством  $\{\mu_0^+, \mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+, \dots\}$ . Детерминанты Хилла образуют подкласс класса  $\mathfrak{F}$  вещественных целых функций  $u(z)$  таких, что все корни уравнения  $u^2(z) = 1$  вещественны. Для описания класса  $\mathfrak{F}$  введем множество  $\mathfrak{H}$  всех функций  $\theta(z)$ , отображающих полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  конформно на области вида

$$\{p\pi < \text{Re } \theta < q\pi, \text{Im } \theta > 0\} \setminus \bigcup_{p < k < q} \{\text{Re } \theta = k\pi, 0 \leq \text{Im } \theta \leq h_k\}, \quad (3)$$

где  $p, q, k$  — целые числа (возможно,  $p = -\infty, q = +\infty$ ),  $0 \leq h_k < \infty, \theta(\infty) = \infty$ . В полуплоскость  $\text{Im } z < 0$  функции  $\theta(z)$  мы продолжаем формулой  $\theta(z) = \overline{\theta(\bar{z})}$ .

**Теорема 1.** *Класс  $\mathfrak{F}$  состоит из всех функций  $u(z)$ , представимых в виде  $u(z) = \cos \theta(z)$ , где  $\theta(z) \in \mathfrak{H}$ .*

**Замечание 1.** Подкласс  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$ , состоящий из функций  $u(z) \in \mathfrak{F}$   $u(0) = 1$  рода нуль с положительными корнями, был введен ранее М. Г. Крейном <sup>(2)</sup>. Из теоремы 1 следует, что он состоит из функций  $u(z) = \cos \theta(z)$ , где  $\theta(z) \in \mathfrak{H}$  и  $p = 0, q = +\infty$ .

**Замечание 2.** Функции  $u(z) \in \mathfrak{F}$  не выше экспоненциального типа и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^+ |u(t)| (1+t^2)^{-1} dt < \infty. \quad (4)$$

Существенные для дальнейшего асимптотические свойства функций класса  $\mathfrak{F}$  получаются из следующей теоремы о функциях  $w(z)$ , дающих конформные отображения полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на области вида

$$\{\text{Im } w < 0\} \setminus \bigcup_{h=-\infty}^{\infty} \{\text{Re } w = m_h, 0 \leq \text{Im } w \leq h_h\}, \quad (5)$$

где  $m_h$  — произвольные вещественные числа,  $\inf (m_{h+1} - m_h) > 0, 0 \leq h_h < \infty, w(\infty) = \infty$ .

Теорема 2. Для того чтобы функция  $w(z)$  допускала представление

$$w(z) = cz + d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_p z^{-p} + \psi(z) z^{-p},$$

где  $c > 0$ ,  $d_0, \dots, d_p$  — вещественные постоянные, а функция  $\psi(z)$  удовлетворяет одному из следующих условий: а)  $\psi(z)$  принадлежит классу  $H_2$  в полуплоскости  $\text{Im } z > \delta$ ,  $\forall \delta > 0$ , б)  $\psi(z)$  принадлежит классу  $H_2$  в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , в)  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \max_{[h, h+1]} |\psi(t)|^2 < \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы

выполнялись соответственно условия: а')  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} m_h^{2p} h^4 < \infty$ , б')  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} m_h^{2p} h^3 < \infty$ , в')  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} m_h^{2p} h^2 < \infty$ .

Теорема 3. Пусть  $u(z) = \cos \theta(z) \in \mathfrak{F}$ . Для того чтобы имело место представление

$$u(z) = \cos(cz + d_0) + \frac{d_1 c}{cz + d_0} \sin(cz + d_0) + \frac{f(z)}{z}$$

где  $c > 0$ ,  $d_0, d_1$  — вещественные постоянные, а  $f(z)$  — целая функция экспоненциального типа,  $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $p = -\infty$ ,  $q = +\infty$ ,  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} k^2 h^4 < \infty$ .

Пусть числа  $\dots a_k^- \leq a_k^+ < a_{k+1}^- \leq a_{k+1}^+ < \dots$  определены условиями

$$u(a_k^\pm) = (-1)^k, \quad |u(x)| \geq 1 \text{ при } x \in [a_k^-, a_k^+].$$

Для справедливости асимптотических формул

$$a_k^\pm = c^{-1}(k\pi - d_0) - d_1(k\pi - d_0)^{-1} + k^{-1} \varepsilon_k^\pm, \quad \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_h^\pm)^2 < \infty,$$

где  $c > 0$ ,  $d_0, d_1$  — вещественные постоянные, необходимо и достаточно, чтобы  $p = -\infty$ ,  $q = +\infty$ ,  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} (kh_k)^2 < \infty$ .

Изучение возможного расположения простых корней уравнения  $u^2(z) = 1$ , где  $u(z) \in \mathfrak{F}$ , приводит, как показал М. Г. Крейн<sup>(2)</sup>, к следующей задаче. Обозначим через  $\mathfrak{E}$  класс всех вещественных целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих условию (4). Требуется найти условия на функцию  $T(z) \in \mathfrak{E}$  с простыми вещественными нулями, обеспечивающие разрешимость в классе  $\mathfrak{E}$  неопределенного уравнения

$$X^2(z) + T(z) Y^2(z) = 1. \quad (6)$$

Теорема 4. Для того чтобы уравнение (6) имело решение  $X(z)$ ,  $Y(z) \in \mathfrak{E}$ , необходимо и достаточно, чтобы нашлись функция  $\varphi(z) \in \mathfrak{E}$  и постоянная  $h$  такие, что функция

$$\theta(z) = h + \int_0^z \varphi(\xi) \{T(\xi)\}^{-1/2} d\xi$$

принадлежит классу  $\mathfrak{F}$ . Общий вид функций  $X(z)$ ,  $Y(z) \in \mathfrak{E}$  и удовлетворяющих уравнению (6) дается формулами

$$X(z) = \cos \theta(z), \quad Y(z) = \{T(z)\}^{-1/2} \sin \theta(z). \quad (7)$$

Замечание. Условие, указанное в теореме 4, является необходимым и достаточным и для существования решения  $X(z)$ ,  $Y(z)$  уравнения (6) в классе вещественных целых функций с вещественными корнями. Общий вид таких решений дается формулами (7).

Обозначим собственные значения краевых задач, порождаемых на сегменте  $[0, c]$  операцией (1) и краевыми условиями

$$y(0) = y(c) = 0 \quad \text{или} \quad y(0) = y'(c) = 0, \quad (8)$$

соответственно через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  и  $\nu_1, \nu_2, \dots$ . Следующие теоремы уточняют известные асимптотические формулы (см., например, <sup>(1-5)</sup>) для последовательностей  $\{\lambda_k\}$ ,  $\{\nu_k\}$ ,  $\{\mu_k^-\}$ ,  $\{\mu_k^+\}$ . Пусть  $W_2^n[0, c]$  — пространство С. Л. Соболева  $n$  раз дифференцируемых на сегменте  $[0, c]$  функций с обычным определением нормы, а  $\tilde{W}_2^n[0, c]$  — его подпространство, состоящее из функций  $v(x) \in W_2^n[0, c]$ , удовлетворяющих периодическим краевым условиям:  $v^{(k)}(0) = v^{(k)}(c)$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$ . Отметим, что  $W_2^0[0, c] = \tilde{W}_2^0[0, c] = L_2[0, c]$ .

**Теорема 5.** Если вещественная функция  $v(x) \in W_2^n[0, c]$ , то собственные значения  $\lambda_k, \nu_k$  краевых задач (8), порождаемых на сегменте  $[0, c]$  операцией (1), удовлетворяют таким асимптотическим формулам:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_k} &= \frac{\pi k}{c} + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n+2} a_{2j+1} \left( \frac{2\pi k}{c} \right)^{-(2j+1)} + \left( \frac{2\pi k}{c} \right)^{-(n+1)} \left\{ s_n \left( \frac{2\pi k}{c} \right) + \frac{\alpha_k}{k} \right\}, \\ \sqrt{\nu_k} &= \frac{\pi(2k-1)}{2c} + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n+2} b_{2j+1} \left( \frac{\pi(2k-1)}{2c} \right)^{-(2j+1)} + \\ &+ \left( \frac{\pi(2k-1)}{2c} \right)^{-(n+1)} \left\{ s_n \left( \frac{\pi(2k-1)}{2c} \right) + \frac{\beta_k}{k} \right\}, \end{aligned}$$

где числа  $a_{2j+1}, b_{2j+1}$  от  $k$  не зависят,

$$a_1 = b_1 = c^{-1} \int_0^c v(x) dx, \quad s_n(p) = (-1)^n c^{-1} \int_0^c \sin \left\{ px - \frac{\pi}{2}(n+1) \right\} v^{(n)}(x) dx,$$

$$\text{и } \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) < \infty.$$

**Теорема 6.** Если вещественная функция  $v(x) \in \tilde{W}_2^n[0, c]$ , то собственные значения периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых на сегменте  $[0, c]$  операцией (1), удовлетворяют таким асимптотическим формулам:

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu_k^\pm} &= \frac{\pi k}{c} + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n+2} a_{2j+1} \left( \frac{2\pi k}{c} \right)^{-(2j+1)} \pm \\ &\pm \left( \frac{2\pi k}{c} \right)^{-(n+1)} \left\{ \left| e_n \left( \frac{2\pi k}{c} \right) \right| + \frac{\varepsilon_k^\pm}{k} \right\}, \end{aligned}$$

где числа  $a_{2j+1}$  те же, что в теореме 5, и

$$e_n(p) = c^{-1} \int_0^c e^{-2ipx} v^{(n)}(x) dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k^\pm|^2 < \infty.$$

Обратную задачу для операторов Хилла и тесно связанную с ней обратную задачу Борга о восстановлении потенциала  $v(x)$  по спектрам  $\{\lambda_k\}$ ,  $\{\nu_k\}$  краевых задач (8) можно свести к обратной задаче теории рассеяния. При этом получается такое видоизменение результата М. Г. Гасымова и Б. М. Левитана <sup>(3)</sup>, относящегося к обратной задаче Борга:

**Теорема 7.** Для того чтобы две последовательности вещественных чисел  $\{\lambda_k\}$ ,  $\{\nu_k\}$  были спектрами краевых задач (8), порождаемых на сегменте  $[0, c]$  одной и той же операцией (1) с вещественным потенциалом  $v(x) \in W_2^n[0, c]$ , необходимо и достаточно, чтобы они перемежались:

$$-\infty < \nu_1 < \lambda_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \dots$$

и удовлетворяли таким асимптотическим формулам:

$$\overline{V_{\lambda_k}} = \frac{\pi k}{c} + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n+2} A_{2j+1} \left( \frac{2\pi k}{c} \right)^{-(2j+1)} + k^{-(n+1)} \delta_k,$$

$$\overline{V_{\gamma_k}} = \frac{\pi(2k-1)}{2c} + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n+2} B_{2j+1} \left( \frac{\pi(2k-1)}{2c} \right)^{-(2j+1)} + k^{-(n+1)} \gamma_k,$$

где числа  $A_1=B_1$ ,  $A_{2j+1}$ ,  $B_{2j+1}$  не зависят от  $k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \{|\delta_k|^2 + |\gamma_k|^2\} < \infty$ .

Характеристику спектров операторов Хилла дает

**Теорема 8.** Для того чтобы существовал оператор Хилла с вещественным периодическим ( $v(x) \equiv v(x+c)$ ) потенциалом  $v(x) \in W_2^n[0, c]$ , спектр которого состоит из заданной последовательности сегментов (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_k^{\pm} = \mu_0^+ + z^2(\pi k \pm 0),$$

где  $z(\theta)$  — функция, конформно отображающая область (3), у которой  $p = -\infty$ ,  $q = +\infty$ ,  $h_0 = 0$ ,  $h_k = h_{-k}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} (k^{(n+1)} h_k)^2 < \infty$ , в верхнюю полуплоскость, нормированная условиями  $z(0) = 0$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} c\theta^{-1} z(\theta) = 1$ .

**З а м е ч а н и е.** Доказательство последней теоремы дает также метод восстановления всех операторов Хилла, спектры которых состоят из одной и той же последовательности (2), удовлетворяющей этим условиям.

Сопоставим каждой конечной последовательности сегментов

$$[\mu_0^+, \mu_1^-], [\mu_1^+, \mu_2^-], \dots, [\mu_{N-1}^+, \mu_N^-], [\mu_N^-, \infty]$$

два полинома

$$Q(z) = \prod_{k=1}^N (z^2 - c_k^-)(z^2 - c_k^+), \quad P(z) = \prod_{k=1}^N (z^2 - p_k),$$

где  $c_k^{\pm} = \mu_k^{\pm} - \mu_0^+$ , а числа  $p_k \in [c_k^-, c_k^+]$  определяются из системы

$$\int_{\sqrt{c_k^-}}^{\sqrt{c_k^+}} \{Q(x)\}^{-1/2} P(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

В силу теоремы Шварца — Кристоффеля функция

$$w(z) = \int_0^z \{Q(\xi)\}^{-1/2} P(\xi) d\xi$$

осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на область (5), где  $h_k = h_0 = 0$  при  $|k| > N$ , а при  $1 \leq |k| \leq N$  выполняются равенства  $h_k = h_{-k}$ ,  $m_k = -m_{-k}$ , причем

$$m_k = \int_0^{\sqrt{c_k^-}} \{Q(\xi)\}^{-1/2} P(\xi) d\xi, \quad h_k = \int_0^{\sqrt{p_k}} \{Q(\xi)\}^{-1/2} P(\xi) d\xi.$$

Отсюда и из теоремы 8 вытекает

**С л е д с т в и е.** Для того чтобы конечная последовательность сегментов (9) была спектром некоторого оператора Хилла с вещественным  $s$ -периодическим потенциалом, необходимо и достаточно, чтобы числа  $\pi^{-1}st_k$  были целыми.

Физико-технический институт низких температур  
Академии наук СССР  
Харьков

Поступило  
27 I 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> И. В. Станкевич, ДАН, т. 192, № 1 (1970). <sup>2</sup> М. Г. Крейн, ДАН, т. 93, № 5 (1953). <sup>3</sup> Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, УМН, т. 19, в. 2, 116, 3 (1964). <sup>4</sup> В. Ф. Лазуткин, Т. Ф. Панкратова, ДАН, т. 215, № 5, 1084 (1974). <sup>5</sup> В. А. Марченко, Матем. сб., т. 95 (137) 3 (1974).