

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. Б. ОВСЯННИКОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ ЛОКАЛЬНОЙ ГРУППЫ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

При вычислении базиса дифференциальных инвариантов локальной группы Ли существенную роль играет последовательность рангов матриц, составленных из координат продолженных базисных операторов соответствующей алгебры Ли. В статье изучается возможность совпадения рангов для двух последовательных продолжений. Основные результаты сформулированы в виде двух теорем, дающих предварительную классификацию случаев такого совпадения.

1. Рассматривается локальная группа Ли G_r точечных преобразований пространства $R^N(x, u)$, $N=n+m$, $x=(x^1, \dots, x^n)$, $u=(u^1, \dots, u^m)$, представленная своей алгеброй Ли L_r инфинитезимальных операторов с базисом

$$X_p = \dot{x}_p^i(x, u) \partial / \partial x^i + \dot{u}_p^k(x, u) \partial / \partial u^k, \quad p=1, \dots, r.$$

Функции $\dot{x}_p^i$, $\dot{u}_p^k$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

Вводятся симметричные по нижним индексам символы $u_{i_1 \dots i_\gamma}^k$, где каждый индекс i_θ независимо от остальных пробегает значения $1, 2, \dots, n$, и сокращенное обозначение вектора, образованного набором этих символов:

$$u = \{u_{i_1 \dots i_\gamma}^k \mid i_\theta = 1, \dots, n (\theta=1, \dots, \gamma); k=1, \dots, m\}.$$

Пространство $R^N_\gamma = R^{N_\gamma}(x, u, u_1, \dots, u_\gamma)$, в котором координаты точки образуют набор из всех координат всех векторов $x, u, u_1, \dots, u_\gamma$, называется продолженным пространством (γ -м продолжением пространства R^N); его размерность $N_\gamma = n+m(\gamma+n)!/\gamma!n!$.

Для любого отражения $x \rightarrow u(x)$ определено его продолжение до отображения $x \rightarrow (u, u_1, \dots, u_\gamma)(x)$ по формулам вида

$$u_{i_1 \dots i_\theta}^k(x) = \partial^\theta u^k(x) / \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_\theta}.$$

В силу этих формул действие группы G_r естественным образом продолжается до действия продолженной группы G_r в продолженном пространстве. Алгебра Ли группы G_r изоморфна L_r и имеет базис из продолженных операторов

$$X_p = X_p + \sum_{\theta=1}^{\gamma} \dot{u}_{p, i_1 \dots i_\theta}^k \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_\theta}^k}, \quad p=1, \dots, r.$$

Дополнительные координаты продолженных операторов вычисляются по стандартным рекуррентным формулам

$$\dot{u}_{p, i_1 \dots i_{\gamma+1}}^k = D_j^\gamma(\dot{u}_{p, i_1 \dots i_\gamma}^k) - u_{i_1 \dots i_\gamma s}^k D_j^\gamma(\dot{x}_p^s), \quad \gamma=0, 1, 2, \dots,$$

где D_j^γ — операторы полного дифференцирования, имеющие выражения (сумма по k и по всем различным наборам $(i_1 \dots i_\theta)$)

$$D_j^\gamma = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\theta=0}^{\gamma} u_{i_1 \dots i_\theta}^k \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_\theta}^k}, \quad j=1, \dots, n.$$

2. Инварианты продолженных групп G_r называются дифференциальными инвариантами группы G_r . Дифференциальные инварианты J порядка не выше κ являются решениями полной системы ⁽¹⁾

$$X_p(J) = 0, \quad p=1, \dots, r.$$

В совокупности дифференциальных инвариантов определены операции подстановки (при подстановке вместо аргументов любой функции $f(z_1 \dots z_q)$ каких-либо инвариантов получается снова инвариант) и инвариантного дифференцирования. Операторы инвариантного дифференцирования первого порядка имеют вид $\Delta = \lambda^j D_j^\infty$, где функции λ^j , $j=1, \dots, n$, образуют решение полной системы $X_p(\lambda^j) = D_i^0(x_p^j) \lambda^i$, $p=1, \dots, r$, и зависят лишь от конечного числа производных $u_{i_1 \dots i_\theta}^k$.

З а м е ч а н и е. Операторы Δ образуют алгебру Ли операторов над полем инвариантов.

Согласно теореме А. Тресса ⁽²⁾ совокупность дифференциальных инвариантов имеет конечный базис, так что каждый дифференциальный инвариант может быть получен из инвариантов базиса с помощью конечного числа операций подстановки и инвариантного дифференцирования. Возникающие при этом вопросы о числе инвариантов базиса и о порядках образующих базис инвариантов оказываются трудными ввиду отсутствия универсального метода построения базиса. Вместе с тем о порядках инвариантов базиса можно судить, проследив процесс отыскания инвариантов все более и более высоких порядков. Некоторые результаты излагаются ниже.

3. Число функционально независимых инвариантов порядка не выше κ связано с общим рангом (о.р.) матрицы

$$M = [\dot{x}_p^i, \dot{u}_p^k, \dot{u}_{p,i_1}^k, \dots, \dot{u}_{p,i_1 \dots i_\kappa}^k],$$

в которой $p=1, \dots, r$ — номера строк, а индексы $i, k, \binom{k}{i_1}, \dots, \binom{k}{i_1 \dots i_\kappa}$, надлежащим образом упорядоченные, нумеруют столбцы. Именно, если о.р. $M = R_\kappa$, то число независимых инвариантов равно $N_\kappa - R_\kappa$. Это число растет до бесконечности вместе с κ .

Так как для любого $\kappa \geq 0$ матрица M является частью матрицы M и имеет r строк, то справедливы неравенства $R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_\kappa \leq R_{\kappa+1} \leq \dots \leq r$. Если $R_\kappa = R_{\kappa+1}$, то число независимых инвариантов порядка $\kappa+1$ будет равно числу различных производных порядка $\kappa+1$. В этом случае функциональный базис инвариантов порядка $\kappa+2$ может быть найден применением операторов инвариантного дифференцирования к инвариантам порядка $\kappa+1$.

Равенства $R_\kappa = R_{\kappa+1} = r$ означают, что наступила абсолютная стабилизация последовательности рангов матриц M . Поэтому нетривиальной будет лишь такая ситуация, когда $R_\kappa = R_{\kappa+1} < r$. Анализ показывает, что последние соотношения накладывают сильное ограничение на строение алгебры Ли L_r и могут выполняться лишь в исключительных случаях.

Теорема 1. Если $n > 1$ и $R_\kappa = R_{\kappa+1} < r$, то $R_\kappa = N_\kappa = r - 1$.

Теорема 2. Соотношения $R_0=R_1<r$ выполняются тогда и только тогда, когда $R_0=N=r-1$ и когда алгебра Ли L_r подобна специальной алгебре Ли с базисом операторов $Y_v=\partial/\partial y^v$, $v=1, \dots, N$, $Y_{N+1}=y^v\partial/\partial y^v$.

4. Теорема 1 доказывается путем анализа некоторой естественно возникающей системы дифференциальных уравнений. Пусть $\mu=R_\kappa=R_{\kappa+1}<r$ для некоторого $\kappa\geq 0$. Неравенство $R_{\kappa+1}<r$ означает, что строки матрицы $M_{\kappa+1}$ линейно зависимы над кольцом функций $C_\infty(R^{N_{\kappa+1}})$ (или, как говорят, линейно связаны). Можно считать, что первые μ строк линейно не связаны, а последние $r-\mu$ строк линейно выражаются через первые μ . Пусть функции $\varphi_\alpha^v(x, u, u_1, \dots, u_{\kappa+1})$, $v=1, \dots, \mu$; $\alpha=1, \dots, r-\mu$, являются коэффициентами соответствующих линейных приближений. Тогда справедливы соотношения

$$\overset{*}{x}_{\mu+\alpha}^i = \varphi_\alpha^v \overset{*}{x}_v^i, \quad \overset{*}{u}_{\mu+\alpha, i_1 \dots i_\theta}^k = \varphi_\alpha^v \overset{*}{u}_v^k, i_1 \dots i_\theta; \quad (1)$$

$$i=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, m; \quad \alpha=1, \dots, r-\mu; \quad \theta=0, 1, \dots, \kappa+1.$$

Лемма 1. *Функции $\tilde{\varphi}_\alpha^v$ не зависят от $u_{\kappa+1}$.*

Этот ключевой для дальнейшего анализа факт следует из рассмотрения соотношений (1) для $\theta=0, 1, \dots, \kappa$ с учетом равенства $R_\kappa=\mu$. Он позволяет произвести «расщепление» соотношения (1) с $\theta=\kappa+1$ относительно координат вектора u , которые в это соотношение входят явно. В силу рекуррентных формул для координат продолженных операторов и остальных уравнений (1) получается следующая система (2) дифференциальных уравнений для функций φ_α^v (через $w=u_{s_1 \dots s_\kappa}^l$ обозначена любая из координат вектора u):

$$\begin{aligned} \overset{*}{x}_v^s \frac{\partial}{\partial w} \varphi_\alpha^v &= 0, \\ \overset{*}{u}_{v, i_1 \dots i_\theta}^k \frac{\partial}{\partial w} \varphi_\alpha^v &= 0, \quad 0 \leq \theta \leq \kappa-1, \\ \overset{*}{u}_{v, i_1 \dots i_\kappa}^k \frac{\partial}{\partial w} \varphi_\alpha^v &= 0, \quad \left(\begin{matrix} k \\ i_1 \dots i_\kappa \end{matrix} \right) \neq \left(\begin{matrix} l \\ s_1 \dots s_\kappa \end{matrix} \right), \\ \overset{*}{u}_{v, s_1 \dots s_\kappa}^l \frac{\partial}{\partial w} \varphi_\alpha^v &= A_\alpha; \end{aligned} \quad (2')$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{x}_v^s D_j^{\kappa-1} \varphi_\alpha^v &= \delta_j^s A_\alpha, \\ \overset{*}{u}_{v, i_1 \dots i_\theta}^k D_j^{\kappa-1} \varphi_\alpha^v &= u_{i_1 \dots i_\theta}^k A_\alpha, \quad 0 \leq \theta \leq \kappa-1, \\ \overset{*}{u}_{v, i_1 \dots i_\kappa}^k D_j^{\kappa-1} \varphi_\alpha^v &= 0; \end{aligned} \quad (2'')$$

здесь A_α — некоторые вспомогательные функции из $C_\infty(R^{N_\kappa})$; всюду в левых частях подразумевается суммирование по индексу v ; число различных систем (2') равно числу различных координат вектора u , а число систем (2'') равно n . Существенно, что система (2) не зависит от индекса α .

Лемма 2. *Ни одна из функций A_α не обращается тождественно в нуль.*

В противном случае получается $\varphi_\alpha^v = c_\alpha^v (=const)$, что противоречит линейной независимости операторов X_p .

Лемма 3. $\mu = N_*$.

Всегда $\mu \leq N_*$, так как N_* — число столбцов в матрице M , а μ — ее ранг.

Неравенство $\mu < N_*$ означало бы, что алгебра Ли L_r имеет инвариант, что невозможно в силу системы (2) и леммы 2.

Лемма 4. Если $n > 1$, то система уравнений (2) относительно вектора $(\varphi^1, \dots, \varphi^n, A)$ имеет не более одного решения.

Это следует из условий совместности уравнений (2) из леммы 3. Тем самым теорема 1 доказана.

Дальнейшее продвижение в общем случае произвольного κ требует более детального совместного анализа условий интегрируемости системы (2) и свойств транзитивных алгебр Ли операторов с одной линейной связью. Пример реализации соотношений, указанных в теореме 1, при $\kappa > 0$ дает группа преобразований G_6 пространства $R^3(x^1, x^2, u)$ с базисом алгебры Ли $\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial u, x^1 \partial/\partial u, x^2 \partial/\partial u, x^1 \partial/\partial x^1 + x^2 \partial/\partial x^2 + 2u \partial/\partial u$, для которой $R_1 = R_2 = 5$. Однако неизвестно, существуют ли такие примеры для любого $\kappa > 0$.

5. Случай $\kappa = 0$ составляет содержание теоремы 2, в которой снимается ограничение $n > 1$. Здесь лемма 4 справедлива и при $n = 1$, а система (2) существенно упрощается и принимает вид

$$x_v^i \partial \varphi^v / \partial u^i = 0, \quad (3')$$

$$u_v^k \partial \varphi^v / \partial u^i = \delta_i^k A.$$

$$x_v^i \partial \varphi^v / \partial x^j = \delta_j^i A, \quad (3'')$$

$$u_v^k \partial \varphi^v / \partial x^j = 0.$$

Из неравенства $A \neq 0$ (лемма 2) следует, что функции $\varphi^v(x, u)$ функционально независимы. Переход к новым переменным $z^v = \varphi^v(x, u)$, $v = 1, \dots, N$, приводит, в силу уравнений (3), к выражениям для базисных операторов алгебры Ли L_{N+1} в переменных z

$$X_v = A \partial / \partial z^v, \quad v = 1, \dots, N, \quad X_{N+1} = A z^v \partial / \partial z^v.$$

Исследование структуры показывает, что операторы X_v , $v = 1, \dots, N$, порождают подалгебру в L_{N+1} ; кроме того получается выражение $A = a_\alpha z^\alpha + b$, где a_α , $\alpha = 1, \dots, N$, и b — постоянные, причем $b \neq 0$. Переход к новому базису в L_{N+1} : $Y_v = b X_v + a_v X_{N+1}$, $v = 1, \dots, N$, $Y_{N+1} = X_{N+1}$ приводит к просто транзитивной абелевой подалгебре L_N с базисом Y_v , $v = 1, \dots, N$. Еще одна замена переменных, приводящая L_N к алгебре Ли операторов переноса, завершает доказательство теоремы 2.

Интересно отметить, что ситуация, рассмотренная в теореме 2, впервые встретилась при изучении свойства редукции частично инвариантных решений дифференциальных уравнений ⁽³⁾. Именно, при рассмотрении интранзитивной алгебры Ли L_r операторов, для которой выполняется равенство $R_0 = R_1$, делалось заключение, что тогда $R_0 = r$ (это свойство является следствием теоремы 2), а специальная алгебра Ли, упомянутая в теореме 2, служила примером того, что в этом заключении нельзя отказаться от свойства интранзитивности L_r . Теперь видно, что этот пример является (с точностью до подобия) единственно возможным.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
30 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. В. Овсянников, Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1966. ² A. Tresse, Acta Math., v. 18, 1 (1894). ³ Л. В. Овсянников, Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1962.