

В. В. ЛАРИЧЕВА

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА РАЗНОТИПНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 14 III 1975)

Для возмущенной (нелинейной и адиабатической нестационарной) системы (2) с двумя степенями свободы предлагается асимптотическое решение, равномерно * охватывающее переход системы (2) от близости то к одной из степеней свободы, то к другой и, кроме того, позволяющее проследить эволюцию почти замкнутых траекторий (2) в разомкнутые, где зачастую наблюдается соизмеримость возмущающих сил с главными.

Методика данной статьи более общая и простая, чем ⁽³⁾, где не охватывается уход траекторий на аperiodический режим тем более при соизмеримости возмущения с главной силой (тяготения).

Уравнения (2) описывают плоское движение материальной точки в центральном поле тяготения под действием малых, в общем, активных (дающих приток энергии) сил. Центр тяготения — полюс для полярных координат, r^* , φ точки, с ними и их скоростями $\dot{r}^*$, $\dot{\varphi}$ связаны элементы конического сечения p^* , e , ϑ — фокальный параметр, эксцентриситет, истинная аномалия соответственно:

$$r^* = p / (1 + e \cos \vartheta), \quad d(1/r^*)/d\varphi = -e \sin \vartheta / p, \quad r^{*2} \dot{\varphi} = \sqrt{\mu p^*}, \quad (1)$$

где звездочкой сверху обозначены размерные величины, точкой вверху дифференцирование по времени (здесь размерному t^*).

В (1), (3) $\mu = fM$, f — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра.

Заменим r^* , φ , $\dot{r}^*$, $\dot{\varphi}$ переменными p^* , φ , $\xi = e \cos \vartheta$, $\eta = e \sin \vartheta$, в которых движение точки разложится как сложное на относительное ξ , η и переносное p^* , φ . За независимую переменную возьмем φ и выпишем безразмерные уравнения плоского возмущенного движения точки в центральном поле тяготения

$$d\tau/d\varphi = \varepsilon P_1, \quad dp/d\varphi = \varepsilon P_2, \quad d\xi/d\varphi = -\eta + 2\varepsilon a_\varphi r^2, \quad d\eta/d\varphi = \xi + \varepsilon a_r r^2, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время,

$$P_1 = r^{3/2} / \sqrt{1 + \xi}, \quad P_2 = 2a_\varphi r^3, \quad r = p / (1 + \xi), \quad a_1 = a_r + a_\varphi \eta / (1 + \xi)$$

и t , r , p , εa_φ , εa_r — безразмерные время, радиус-вектор, фокальный параметр, трансверсальная и радиальная компоненты возмущающего ускорения, непрерывно (или гладко) зависящего от τ , p , ξ , η .

Размерные величины t^* , p^* , r^* , εa^* вычисляются по формулам

$$t^* = t p_0^{3/2} / \sqrt{\mu}, \quad r^* = r p_0^*, \quad p^* = p p_0^*, \quad \varepsilon a^* = \varepsilon a \mu / p_0^{*2}. \quad (3)$$

* Равномерная асимптотика разнотипных решений (чтобы избежать их склейки) разработана для линейных нестационарных уравнений ⁽¹⁾ и для некоторых нелинейных систем ^(2, 3).

Почти изолированные движения степеней свободы (2) изучены в (⁴⁻⁶). Изолированное переносное движение выделяется из (2) при условии относительного равновесия степени свободы ξ, η

$$d\xi/d\varphi = d\eta/d\varphi = 0. \quad (4)$$

Движение (2) будет близким к изолированному переносному, пока $a_\varphi r^2, a, r^2 \sim 1$ и если $d\xi/d\varphi, d\eta/d\varphi, \xi, \eta, (e) \sim \varepsilon$, тогда траекторией будет плавная бесколебательная спираль $r=p(\varphi)$, почти круговая за каждый оборот.

В ряде случаев на траектории переносного движения достигается значение $e=1$ (размыкание траектории). Например (^{4, 7}), когда точка удаляется от центра тяготения под действием неубывающего возмущающего ускорения, тогда главное (гравитационное) ускорение, убывая вдоль траектории, станет к моменту достижения $e=1$ соизмеримым с возмущающим и система (2) потеряет малый параметр.

Точное частное решение (2), близкое при $\xi, \eta \sim \varepsilon$ к траектории изолированного переносного движения, назовем истинной траекторией переносного движения, которая также спиральна *. Но именно такая спираль будет линией центров колебаний (до апериодического режима) переменных ξ, η , что обеспечит периодичность правых частей уравнений (9), исследуемых методом осреднения (⁸).

Введем в (2) отсчет ξ, η от $\xi(\tau), \eta(\tau)$ — элементов спирали

$$\xi_1 = \xi - \xi(\tau), \quad \eta_1 = \eta - \eta(\tau). \quad (5)$$

Правые части, отсчитанные от соответствующих значений на спирали, для двух последних уравнений (2) обозначим через

$$R_1 = 2(a_\varphi r^2 - \overline{a_\varphi r^2}), \quad R_2 = a_1 r^2 - \overline{a_1 r^2}. \quad (6)$$

Пользуясь (5), (6) и определением спирали как частного решения (2), придадим последним двум уравнениям (2) вид квазигамильтоновой и квазилинейной системы (пока $R_1, R_2 \sim 1$)

$$d\xi_1/d\varphi = -\eta_1 + \varepsilon R_1, \quad d\eta_1/d\varphi = \xi_1 + \varepsilon R_2 \quad (7)$$

и ляпуновской, поскольку $R_1 = R_2 = 0$ при $\xi_1 = \eta_1 = 0$ (на спирали), поэтому решение (7), колебательное около нуля и почти гармоническое, представим как

$$\xi_1 = \tilde{e} \cos \tilde{\vartheta}, \quad \eta_1 = \tilde{e} \sin \tilde{\vartheta}, \quad \tilde{\vartheta} = \varphi - \tilde{\omega}; \quad (8)$$

здесь $\tilde{e}, \tilde{\omega}$ — пока неизвестные функции φ (и в общем τ), удовлетворяющие, в силу (7), уравнениям

$$d \ln \tilde{e}^2 / d\varphi = \varepsilon \Pi_1, \quad d\tilde{\omega} / d\varphi = \varepsilon \Pi_2, \quad \Pi_1 \tilde{e}^2 = R_1 \xi_1 + R_2 \eta_1, \\ \Pi_2 \tilde{e}^2 = R_1 \eta_1 - R_2 \xi_1. \quad (9)$$

Ввиду (6) — (8) функции Π_1, Π_2 определены и ограничены как вдали от спирали, так и при $\tilde{e}^2 \rightarrow 0$, т. е. при приближении к спирали. Значит, $\tilde{\vartheta}$ монотонна по φ , и по всей области ограниченности (вплоть до спирали и апериодического режима) функции Π_1, Π_2 периодичны по $\tilde{\vartheta}$, а уравнения (9) содержат малый параметр и осредняемы по $\tilde{\vartheta}$ с результатом (10) с начальными условиями, совпадающими с (9),

$$d \ln \tilde{e}^2 / d\varphi = \varepsilon \Pi_1^0, \quad d\tilde{\omega} / d\varphi = \varepsilon \Pi_2^0, \quad \Pi^0 = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \Pi d\tilde{\vartheta}. \quad (10)$$

* Алгоритмы уточнения начальных условий (при $e_0 \sim \varepsilon$) спирали и построения ряда спиралей даны в (^{3, 7}).

Согласно (⁹⁻¹¹), в области ограниченности и достаточной гладкости Π_1 , Π_2 разность решений (9), (10) — погрешность осреднения — остается $\sim \varepsilon$ до $\varphi \sim 1/\varepsilon$, причем малая абсолютная погрешность $\rho \sim \varepsilon$ в функции $\ln \tilde{e}^2$ вносит в $\tilde{e}$ малую относительную погрешность $\Delta \tilde{e}/\tilde{e} = \rho_1 \sim \varepsilon$. Последнего и малости абсолютной погрешности $\rho_2 \sim \varepsilon$ в функции $\tilde{\omega}$ достаточно, чтобы при $\xi_1, \eta_1 \rightarrow 0$ (стремление к спирали) погрешность осреднения в ξ_1, η_1 убывала пропорционально $\tilde{e}$ — расстоянию до спирали. Тем самым осреднение относительного движения в переменных $\tilde{e}, \tilde{\omega}$, отсчитанных от спирали, дает равномерное вплоть до спирали асимптотическое представление $\tilde{e}, \tilde{\omega}$ и ξ_1, η_1 .

Для осреднения первых двух уравнений (2) введем в их правых частях отсчет ξ, η от значений на спирали и подставим выражения (8), обеспечивающие периодичность правых частей по $\tilde{\theta}$.

Таким образом, если взять частное спиральное решение (2) за линию центров колебаний ξ, η и перейти к ξ_1, η_1 , то равномерность асимптотического представления (2) при взаимовлиянии степеней свободы достигается осреднением по периоду относительно движения ξ_1, η_1 .

Выпишем следствия двух последних уравнений (2), переходя в их левых частях от ξ, η к $e^2, \omega = \varphi - \theta$

$$de^2/d\varphi = 2\varepsilon r^2(2a_\varphi \xi + a_1 \eta), \quad d\omega/d\varphi = \varepsilon(r^2/e^2)(2a_\varphi \eta - a_1 \xi). \quad (11)$$

Переходя в правых частях (11) от ξ, η к ξ_1, η_1 , далее к $\tilde{e}, \tilde{\theta}$, обеспечим периодичность по $\tilde{\theta}$ этих правых частей вплоть до спирали и применимость осреднения к (11) в более широкой области, нежели при переходе в правых частях (11) от ξ, η к e, θ , когда периодичность по θ будет лишь вдали от спирали.

Для выявления тенденций размыкания траекторий (2), особенно при соизмеримости возмущения с силой тяготения, более удобна по сравнению с φ независимая переменная t или $z = p/\varepsilon$. Так, правые части уравнений для $\tau, \varphi, \tilde{e}, \tilde{\theta}$ по z будут убывающими функциями p , удовлетворяющими условиям Липшица до аperiodического режима. К этим уравнениям применима теорема (¹¹), оценивающая погрешность осреднения с переменным периодом вплоть до аperiodического режима.

Аналогичные (¹¹) осредненные (по переменному периоду) уравнения, сохраняющие точность до аperiodического режима, для (2), (9) удобно представлять в эквивалентной форме — форме отношений осредненных по $\tilde{\theta}$ уравнений

$$d\tau/dp = P_1^0/P_2^0, \quad d\varphi/dp = 1/\varepsilon P_2^0, \quad d \ln \tilde{e}^2/dp = \Pi_1^0/P_2^0, \quad d\tilde{\omega}/dp = \Pi_2^0/P_2^0. \quad (12)$$

Аналогично (⁹⁻¹¹) для области взаимовлияния степеней свободы (2) с тенденцией на аperiodичность легко доказать теорему о равномерности представления решения (2) решением (12). Поэтому разлагая правые части (12) в ряды по степеням $\tilde{e}$ и удерживая лишь первые члены, получим простые соотношения, охватывающие основные особенности (2).

Для примера $a_\varphi = 1, a_r = 0$ известно (^{3, 4, 7}), что эксцентриситет спирали возрастает монотонно и значение $e = 1$ достигается при соизмеримости возмущающего ускорения с гравитационным; на близких к замкнутым внеспиральным траекториях $d\tilde{e}^2/d\varphi < 0$, т. е. эти траектории стремятся к спирали. При этом эксцентриситет внеспиральных траекторий сначала убывает (но не до нуля), затем, возрастая, стремится к соответствующему

* Эволюция почти замкнутых траекторий (2) в разомкнутые происходит в случаях, когда в среднем знакопостоянна ea_φ — трансверсальная компонента возмущения, чему соответствует монотонность $p(t)$.

значению на спирали. Перечисленные особенности отражает упрощенное уравнение, достаточно точно согласующееся с (2):

$$de^2/d \ln p = \bar{\eta}^2 + \bar{\epsilon}^2 (6\bar{\eta} - 3\bar{\eta}^2 - 3/2), \quad (13)$$

полученное как отношение осредненных по $\bar{\theta}$ уравнений первого (11) ко второму (2) с разложением интегралов правой части по степеням $\bar{\epsilon}$ и в пренебрежении $\bar{\xi}$.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР Д. Е. Охоцимского за полезные обсуждения вопросов асимптотики уравнений небесной механики.

Центральный аэрогидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
24 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Дородницын, УМН, т. 7, № 6 (52), 3 (1952). ² А. А. Дородницын, ПММ, т. 11, № 3, 313 (1947). ³ В. В. Ларичева, М. В. Рейн, Космич. исслед., т. 3, № 1 (1965). ⁴ H. S. Tsien, J. Am. Rocket Soc., v. 23, № 4, 233 (1953). ⁵ Д. Е. Охоцимский, Т. М. Энеев, Г. П. Таратынова, УФН, т. 63, № 1а, 33 (1957). ⁶ N. N. Moiseyev, Proc. XIII Intern. Astronaut. Congr., 1962, Vien, 1964. ⁷ Д. Е. Охоцимский, Космич. исслед., т. 2, № 6 (1964). ⁸ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., «Наука», 1963. ⁹ В. В. Ларичева, ДАН, т. 165, № 2 (1965); Дифф. уравн., т. 2, № 3 (1966). ¹⁰ В. В. Ларичева, ДАН, т. 220, № 4 (1975). ¹¹ В. В. Ларичева, ДАН, т. 198, № 6 (1971).