

УДК 517.933

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Е. Ф. МИЩЕНКО, Н. САТИМОВ

УКЛОНЕНИЕ ОТ ВСТРЕЧИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ МНОГИХ ЛИЦ

А. Задача об уклонении от встречи одного линейного управляемого объекта от нескольких линейных управляемых объектов естественным образом сводится к дифференциальной игре

$$\dot{z} = Cz + f(u, v), \quad (1)$$

где $z \in R^n$; R^n — n -мерное векторное евклидово пространство; C — постоянная матрица, u, v — управляющие параметры, u — параметр преследования, v — параметр убегания, $u \in P, v \in Q, P$ и Q — непустые компактные подмножества пространств R^p и R^q соответственно; f — определенная на множестве $P \times Q$ и непрерывная на нем по совокупности (u, v) функция. Далее в R^n выделены линейные векторные подпространства $M_1, M_2, \dots, M_m$. Игра считается оконченной, когда фазовый вектор z попадает на множество $M = \bigcup_{i=1}^m M_i$.

Будем говорить, что из точки $z_0 \in R^n \setminus M$ можно уклониться от встречи с множеством M , если по любой измеримой функции $u(t)$ можно построить такую измеримую функцию $v(t)$, что точка $z(t)$, являющаяся решением уравнения

$$\dot{z} = Cz + f(u(t), v(t)), \quad z(0) = z_0, \quad (2)$$

ни при каком значении времени $t, 0 < t < \infty$, не попадет на множество M : $z(t) \notin M$ при всех $t \in (0, \infty)$. При этом для нахождения значения $v(t)$ параметра $v \in Q$ в каждый момент времени $t \geq 0$ разрешается использовать лишь значения $z(t)$ и $u(t)$ фазового вектора игры z и параметра преследования u в тот же момент времени t . Если из любой точки $z_0 \in R^n \setminus M$ можно уклониться от встречи с множеством M , то будем говорить, что в игре (1) возможно убегание.

В дальнейшем через L_i будем обозначать ортогональное дополнение в R^n к подпространству $M_i, i=1, 2, \dots, m$; через W_i — пока произвольное подпространство пространства L_i ; через π_i — оператор ортогонального проектирования из R^n на W_i ; через O — нуль пространства R^n ; через S_i — единичную сферу пространства W_i с центром в точке O ; через (z_1, z_2) — скалярное произведение векторов z_1 и z_2 в R^n . Во всем последующем тексте мы будем называть константами положительные числа, зависящие лишь от игры ⁽¹⁾, но не зависящие ни от начального значения z_0 , ни от управлений $u(t)$ и $v(t)$.

Б. Будем говорить, что в уравнении (1) параметр v обладает маневренностью, если существуют натуральное число k , двумерные подпространства $W_i \subset L_i$, линейные отображения D, D_i, F_i пространства R^n в R^2 такие, что:

- отображение $F_i: W_i \rightarrow R^2$ взаимно однозначно для всех $i=1, 2, \dots, m$;
- каждое множество $F_i \pi_i C^j f(P, Q), i=1, 2, \dots, m, j=0, 1, \dots, k-2$, есть точка;
- $F_i \pi_i C^{k-1} = D_i + D$, где каждое множество $D_i f(P, Q), i=1, 2, \dots, m$, есть точка, а множество

$$R = \bigcap_{u \in P} Df(u, Q) \quad (3)$$

содержит внутреннюю точку.

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) параметр v обладает маневренностью. Тогда в игре (1) возможно убежание. При этом процессом уклонения от встречи можно управлять так, чтобы расстояние $\xi_i(t)$ от точки $z(t)$ до подпространства M_i , $i=1, 2, \dots, m$, оставалось больше некоторой эффективно вычисляемой положительной функции времени t .

Доказательство теоремы 1 мы здесь не приводим. Его можно провести, незначительно усложнив построения, использованные в работе (3).

В. Пусть $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4; \dots; \psi_{2m-1}, \psi_{2m}$ — произвольные единичные векторы из R^n , причем $\psi_{2i-1} = -\psi_{2i}$, $i=1, 2, \dots, m$. Из этой системы образуем множество $K_1, K_2, \dots$ следующим образом: в каждое множество K входит только m векторов, причем из каждой пары ψ_{2i-1}, ψ_{2i} только один. Ясно, что множество $\{K_1, K_2, \dots\}$ конечно; число его элементов обозначим через r .

Будем говорить, что в уравнении (1) параметр v обладает превосходством над параметром u , если существует натуральное число k подпространства $W_i \subset L_i$ и векторы $l_i \in W_i$ такие, что для всех $i=1, 2, \dots, m$; $j=0, 1, \dots, k-2$:

- а) каждое множество $\pi_i C^j f(P, Q)$ есть точка;
- б) $\dim W_i \geq k+2$;
- в) одно из двух чисел N_1 и N_2 , где

$$N_1 = \min_{\substack{\psi_1 \psi_2 \in S_1 \\ \dots \\ \psi_{2m-1}, \psi_{2m} \in S_m}} \max_{(K_1, K_2, \dots, K_r)} \max_v \min_u \min_{1 \leq i \leq m} (\bar{\psi}_i, \pi_i C^{k-1} f(u, v) - l_i),$$

$$N_2 = \min_{\substack{\psi_1 \psi_2 \in S_1 \\ \dots \\ \psi_{2m-1}, \psi_{2m} \in S_m}} \max_{(K_1, K_2, \dots, K_r)} \min_u \max_v \min_{1 \leq i \leq m} (\bar{\psi}_i, \pi_i C^{k-1} f(u, v) - l_i),$$

положительно (векторы $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_m$ образуют множество $\bar{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_r\}$).

Теорема 2. Предположим, что в уравнении (1) параметр v обладает превосходством над параметром u . Тогда в игре (1) возможно убежание, причем процессом уклонения от встречи можно управлять так, чтобы для расстояния $\xi_i(t)$ от точки $z(t)$ до подпространства M_i , $i=1, 2, \dots, m$, были справедливы следующие ниже оценки (8) и (9).

Доказательство теоремы 2. Пусть $a_{i,0}(z_0) = \pi_i z_0$, $a_{i,1}(z_0) = \pi_i C z_0 + \pi_i f(P, Q), \dots, a_{i,k-1}(z_0) = \pi_i C^{k-1} z_0 + \pi_i C^{k-2} f(P, Q)$, $a_{i,k}(z_0) = \pi_i C^k z_0 + l_i$. Выберем m векторов $\varphi_1(z_0), \varphi_2(z_0), \dots, \varphi_m(z_0)$ из условий $(a_{ij}(z_0), \varphi_i(z_0)) = 0$, $i=1, 2, \dots, m$; $j=0, 1, \dots, k$. Обозначим $\psi_{2i-1}(z_0) = \varphi_i(z_0)$, $\psi_{2i}(z_0) = -\varphi_i(z_0)$. Из системы $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2m-1}, \psi_{2m}$ образуем множество $K_1, K_2, \dots, K_r$.

Пусть $u(s)$, $0 \leq s \leq 1$, — произвольная измеримая функция, $u(s) \in P$ почти для всех $s \in [0, 1]$. При $N_1 > 0$ существуют множество $\bar{K}_1 = \{\bar{\psi}_1^1, \bar{\psi}_2^1, \dots, \bar{\psi}_m^1\}$ и вектор $\tilde{v} = \tilde{v}(\bar{\psi}_i^1)$ такие, что при всех $i=1, 2, \dots, m$, $s \in [0, 1]$

$$(\bar{\psi}_i^1, \pi_i C^{k-1} f(u(s), \tilde{v}) - l_i) \geq N_1. \quad (4)$$

При $N_2 > 0$ существуют множество $\bar{K}^2 = \{\bar{\psi}_1^2, \bar{\psi}_2^2, \dots, \bar{\psi}_m^2\}$ и измеримая функция $\tilde{v}(s)$, $0 \leq s \leq 1$, такие, что при всех $i=1, 2, \dots, m$, $s \in [0, 1]$

$$(\bar{\psi}_i^2, \pi_i C^{k-1} f(u(s), \tilde{v}(s)) - l_i) \geq N_2. \quad (5)$$

Нетрудно показать, что существует константа θ такая, что при всех $i=1, 2, \dots, m$, $t \in [0, \theta/(1+\eta_0)]$ для решения $z(t)$ уравнения (2), в котором

$u(t)$ — произвольная измеримая функция, а $v(t) = \tilde{v}$ выбрана из условий (4) или (5), справедлива оценка

$$\xi_i(t) > \frac{N}{2k!} t^k, \quad (6)$$

где $N = N_1$, если $N_1 > 0$, и $N = N_2$, если $N_2 > 0$; здесь $\eta_{0i} = \eta_i(0)$, $\eta_i(t)$ — расстояние от точки $z(t)$ до подпространства L_i .

Пусть $0 < \varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{N}{k!} \theta^k \right\}$. В пространстве R^n рассмотрим поверхности Σ_i , определяемые уравнениями

$$\xi_i = \frac{\varepsilon}{[1 + \eta_i]}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Каждая поверхность Σ_i разбивает пространство R^n на две области: внутреннюю Σ_i^- , содержащую M_i , и внешнюю Σ_i^+ . Пусть

$$\bar{\Sigma}_i = \Sigma_i \cup \Sigma_i^-, \quad \Sigma_{i_1, i_2, \dots, i_\gamma} = \bar{\Sigma}_{i_1} \cap \bar{\Sigma}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{\Sigma}_{i_\gamma},$$

$$z_0 \in \Sigma_{i_1, i_2, \dots, i_\gamma}^- \cap [\bar{\Sigma}_{j_1} \cup \bar{\Sigma}_{j_2} \cup \dots \cup \bar{\Sigma}_{j_\delta}],$$

$$\{i_1, i_2, \dots, i_\gamma\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_\delta\} = \{1, 2, \dots, m\}, \quad \eta_0 = \max \{\eta_{0i_1}, \eta_{0i_2}, \dots, \eta_{0i_\gamma}\}.$$

Управление $v_0(s)$ (равное $\tilde{v}$ при $N_1 > 0$ и $\tilde{v}(s)$ в случае $N_2 > 0$), рассматриваемое на отрезке $[0, \theta/(1 + \eta_0)]$, применяется до тех пор, пока точка $z(t) \in \bar{\Sigma}_{i_1} \cap \bar{\Sigma}_{i_2} \cap \dots \cap \bar{\Sigma}_{i_\gamma}$; в тот первый момент времени t_0 , $t_0 < \theta/(1 + \eta_0)$, для которого $z(t_0) \in \Sigma_{i_1} \cup \Sigma_{i_2} \cup \dots \cup \Sigma_{i_\gamma}$, составляются соответствующие множество $\Sigma_{i_1, i_2, \dots, i_\gamma}$ и число η_0 из условия $z(t_0) = z_0$. Прямой подсчет показывает, что на отрезке $[0, t_0]$ имеет место оценка

$$\xi_{i_\nu}(t) > \frac{d \xi_{0i_\nu}^k}{[1 + \eta_{i_\nu}(t)]^k}, \quad \nu = 1, \dots, \gamma; \quad \xi_{j_\mu}(t) > \frac{d e^k}{[1 + \eta_{j_\mu}(t)]^k}, \quad \mu = 1, \dots, \delta, \quad (8)$$

где d — константа.

Если в течение некоторого промежутка времени точка $z(t)$ находится вне множества $\Sigma = \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2 \cup \dots \cup \bar{\Sigma}_m$, то параметр ν выбирается произвольно, а в тот первый момент времени t_1 , для которого $z(t_1) \in \Sigma$, составляются соответствующие множества $\Sigma_{i_1, i_2, \dots, i_\gamma}$ и число η_0 из условия $z_0 = z(t_1)$ и т. д. На отрезке $[0, t_1 + t_0']$, где t_0' находится аналогично t_0 , справедлива оценка

$$\xi_{i_\nu}(t) > \frac{d_1 e^k}{[1 + \eta_{i_\nu}(t)]^{k_2 + k}}, \quad \nu = 1, \dots, \gamma; \quad \xi_{j_\mu}(t) > \frac{d_1 e^k}{[1 + \eta_{j_\mu}(t)]^k}, \quad \mu = 1, \dots, \delta, \quad (9)$$

где d_1 — константа.

Заметим, что при $N_1 > 0$ каждое значение $v_0(s)$ находится по $z(s)$, а при $N_2 > 0$ — по $z(s)$ и $u(s)$.

Г. Будем говорить, что для уравнения (1) выполнено опорное свойство, если существуют натуральное число k , подпространства W_i , $\dim W_i \geq 2$, константа θ и векторы $l_i \in W_i$ такие, что при всех $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, k-2$; $t \in [0, 2\theta]$:

а) каждое множество $\pi_i C^j f(P, Q)$ есть точка;

б) для каждой точки $z_0 \in R^n \setminus M$ найдется подпространство $L_i(z_0) \subset W_i$, $\dim L_i(z_0) < \dim W_i$, такое, что

$$G_i(z_0, t) = \pi_i e^{tc} z_0 + b_{i,0} t + \dots + b_{i,k-2} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + l_i \frac{t^k}{k!} \subset L_i(z_0), \quad (10)$$

где $b_{ij} = \pi_i C^j f(P, Q)$;

в) одно из чисел N_1, N_2 , определенных в пункте В, положительно.

Теорема 3. Пусть для уравнения (1) выполнено опорное свойство. Тогда в игре (1) возможно убежание, причем процессом уклонения от встречи можно управлять так, чтобы для расстояния $\xi_i(t)$ от точки $z(t)$ до подпространства M_i , $i=1, 2, \dots, m$, было справедливо неравенство

$$\xi_i(t) > \begin{cases} ct^k, & 0 \leq t \leq \theta_0, \\ l_0, & t > \theta_0, \end{cases}$$

где l_0 и θ_0 — константы.

Доказательство теоремы 3. Векторы $\varphi_i(z_0)$ выберем из условия $(G_i(z_0, t), \varphi_i(z_0)) = 0$ для всех $i=1, 2, \dots, m$, $t \in [0, 2\theta]$. Управление $v_0(s)$, $0 \leq s \leq \theta$ построим так же, как в пункте В. Существуют константы N_0 , $\theta_0 \leq \theta$, такие, что при всех $i=1, 2, \dots, m$, $t \in [0, \theta_0]$

$$(\pi_i z(t), \tilde{\psi}_i^0(z_0)) > N_0 t^k, \quad \{\tilde{\psi}_1^0(z_0), \dots, \tilde{\psi}_m^0(z_0)\} = K^0. \quad (11)$$

Пусть $t \in [l\theta_0, (1+l)\theta_0]$, $l=0, 1, \dots, z_l = z(l\theta_0)$. Выберем векторы φ_i^l из условия

$$G_i(z_l(t), \varphi_i^l) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, 2\theta].$$

Множество K^l , управление $v_l(s)$, $0 \leq s \leq \theta_0$, построим аналогично K^0 и $v_0(s)$. При $t \in [l\theta_0, (1+l)\theta_0]$, $l=1, 2, \dots$, имеем

$$(\pi_i z(t), \tilde{\psi}_i^l) \geq N_0 \frac{(t-l\theta_0)^k}{k!}; \quad (12)$$

$$(\pi_i z(t), \tilde{\psi}_i^{l-1}) > \frac{N_0}{k!} \{[t-(l-1)\theta_0]^k - (t-l\theta_0)^k\} - H(t-l\theta_0),$$

где $\max |\pi_i e^{rf}(u, v)| \leq H$, $i=1, 2, \dots, m$, $r \in [0, \theta]$, $u \in P$, $v \in Q$. Из (12) получаем, что при тех же значениях t

$$\begin{aligned} \xi_i(t) > l_0, \quad l_0 &= \min_{0 \leq t \leq \theta_0} \frac{1}{2} \left[\frac{N_0}{k!} t^k + \alpha(t) \right], \\ \alpha(t) &= \max \left(0, \frac{N_0}{k!} [(t-\theta_0)^k - t^k] - H(t) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что при $N_1 > 0$ значение $v(s)$ строится по $z(s)$, при $N_2 > 0$ — по $z(s)$ и $u(s)$ (ср. (1)).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
19 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, Дифференц. уравнения, т. 7, № 3, 436 (1971).
- ² Л. С. Понтрягин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 112, 30 (1971).
- ³ Е. Ф. Мищенко, Н. Сагимов, Дифференциальные уравнения, т. 9, № 10, 1792 (1973).
- ⁴ Ш. Б. Гусятников, Прикладная математика и механика, т. 38, № 3, 417 (1974).