

Р. Г. НИГМАТУЛЛИН

СЛОЖНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 26 III 1975)

1. Для широкого класса комбинаторных задач не удается найти удовлетворительных алгоритмов их решения. К этому классу относятся задачи на построение минимальных схем, реализующих булевы функции, задачи на покрытие, разнообразные экстремальные задачи на графах (раскраски, клики и т. д.) и т. п. При некоторых ограничениях на класс используемых алгоритмов С. В. Яблонский ⁽¹⁾ и Ю. И. Журавлев ⁽²⁾ доказали, что для ряда задач не существует беспереборных алгоритмов. Используя понятие сводимости по Куку и теорему Кука ⁽³⁾, Карп ⁽⁴⁾ привел большой список задач — претендентов на не решаемые беспереборно. Независимо ряд задач такого же сорта указал Л. А. Левин ⁽⁵⁾.

Поэтому возникла задача о приближенном решении этих проблем. В некоторых случаях достигнут большой прогресс в этом направлении. Так, для задач о построении минимальных контактных схем, схем из функциональных элементов и формул в произвольном конечном базисе, реализующих булевы функции, О. Б. Лупанов ⁽⁶⁾ построил эффективные приближенные алгоритмы, которые для почти всех булевых функций строят асимптотически минимальные схемы. Однако эти алгоритмы, по-видимому, не обеспечивают хорошее равномерное приближение к точному решению. Для метода каскадов Поварова при синтезе контактных схем последнее утверждение доказано в ⁽⁷⁾.

Исследуя приближенные алгоритмы для комбинаторных задач, Джонсон ⁽⁸⁾ пришел к неутешительному выводу: для некоторых графовых задач (например, задача нахождения плотности графа) не удалось найти хоть сколько-нибудь удовлетворительных равномерно приближенных алгоритмов. Неудачи в поисках эффективных приближенных алгоритмов наводят на мысль о том, что их и не существует. Ясно, что доказательство подобного утверждения требует предварительного уточнения понятия «эффективный приближенный алгоритм». В данной работе вводится понятие «приближенная задача с аддитивной точностью h ». Показывается, что многие задачи комбинаторного характера сводятся полиномиально ^(3, 5) к соответствующим приближенным задачам при достаточно хорошей степени приближения. Этот факт естественно толковать как несуществование эффективных приближенных алгоритмов, если нет эффективных алгоритмов для точных задач.

2. Пусть дан конечный алфавит A . Будем обозначать символом A^* множество всех конечных слов в алфавите A , символом N — множество целых неотрицательных чисел.

Следуя Джонсону ⁽⁸⁾, будем характеризовать дискретную экстремальную задачу P следующей четверкой объектов:

$INPUT_P \subset A^*$ (множество входных слов задачи P),

$OUTPUT_P \subset A^*$ (множество выходных слов задачи P),

$SOL_P \subset INPUT_P \times OUTPUT_P$ (множество допустимых пар вход — выход задачи P),

целевая функция $L_P: OUTPUT_P \rightarrow N$ (сложность решения).

При таком определении задачи предполагается, что все содержательные объекты задачи предварительно закодированы словами в алфавите A . Ясно, что такое кодирование всегда можно произвести.

Обозначим $SOL_P(x) = \{y \mid (x, y) \in SOL_P\}$. Не теряя общности, можно считать, что для любого $x \in INPUT_P$ $SOL_P(x)$ непусто. $SOL_P(x)$ называется множеством допустимых решений для входа x .

Задача P (точная) заключается в отыскании по данному $x \in INPUT_P$ такого допустимого решения $y \in SOL_P(x)$, которое доставляет оптимум (в каждой конкретной задаче уточняется — минимум или максимум) функции L_P на множестве $SOL_P(x)$; обозначим этот оптимум $Opt(x)$, а множество таких решений $P(x)$.

Определение. Для $h > 0$ приближенная задача с точностью h для задачи P (обозначение $P \pm h$) характеризуется той же четверкой объектов $INPUT_P$, $OUTPUT_P$, SOL_P и L_P , что и задача P , и заключается в отыскании такого допустимого решения $y \in SOL_P(x)$, для которого $|L_P(y) - Opt(x)| < h$.

Ошибем вариант понятия полиномиальной сводимости задач, введенного в (3-5). Для $x \in A^*$ символом $lg(x)$ обозначим длину слова x .

Пусть $D_f \subset A^*$ — область определения функции f . Частично-рекурсивная словарная функция f называется вычислимой за полиномиальное время, если существует (одноленточная, одноголовочная) машина Тьюринга, вычисляющая f , и полином $p(\cdot)$ такие, что для любого $x \in D_f$ время работы машины Тьюринга на входе x ограничено сверху величиной $p(lg(x))$.

В дальнейшем предполагается, что целевая функция L_P полиномиально вычислима.

Определение. Задача P полиномиально сводима к задаче Q (обозначение $P \leq Q$), если существует пара общерекурсивных словарных функций C, D над алфавитом A , вычисляемых за полиномиальное время, таких, что для любого $x \in INPUT_P = C(x) \in INPUT_Q$ и

$$\bigcup_{y \in Q(C(x))} \{D(y)\} = P(x).$$

Отношение $\leq$ рефлексивно и транзитивно.

Очевидно, $P \pm h \leq P \pm h'$ при $h' \leq h$.

3. В теореме 1 доказывается обратная сводимость при определенном ограничении сверху на h . То, что такое ограничение должно присутствовать, довольно естественно. Действительно, к примеру, задача нахождения наибольшей клики в графе с n вершинами решается тривиально при точности n : достаточно в качестве приближенного решения взять произвольный одновершинный подграф. Полиномиальная сводимость к ней точной задачи означала бы, что точная задача решается за полиномиальное время. Однако, учитывая результаты работ (3-5), на это трудно рассчитывать.

Теорема 1 (о сводимости точной задачи к приближенной). Если для минимизационной задачи P существует пара словарных общерекурсивных полиномиально вычисляемых функций f, g таких, что для любого $x \in INPUT_P$ и для любого $y \in SOL_P(f(x))$ $g(y) = y_1 * \dots * y_h$, где $y_i \in SOL_P(x)$, $i = 1, 2, \dots, h$ ($*$ — разделительный символ), и выполняются неравенства

$$Opt(f(x)) \leq h Opt(x), \quad L_P(y) \geq \sum_{i=1}^h L_P(y_i), \quad (1)$$

то $P \leq P \pm h$.

Для задач на нахождение максимума имеет место аналогичное утверждение с заменой неравенств (1) на противоположные.

Теорема утверждает, что с точностью до полиномиального преобразования сложности даже «самый быстрый» алгоритм для приближенной задачи не более эффективен, чем алгоритмы для точной задачи. В частности, если точная задача требует для своего решения экспоненциальное время, то тем же свойством обладает и приближенная задача при определенной степени точности.

4. Проиллюстрируем возможности применения теоремы о сводимости.

а. Задачи построения минимальных схем, реализующих булевы функции.

Следствие 1. Задача о построении минимальной д.н.ф. полиномиально сводима к приближенной задаче с точностью h (h — произвольная константа).

Пусть $l(z_1, \dots, z_m)$ обозначает линейную функцию $z_1 \oplus \dots \oplus z_m$ (здесь $\oplus$ — символ сложения по модулю 2).

Лемма 1. Для произвольной булевой функции $\varphi(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ любая д.н.ф., реализующая функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n) \& l(z_1, \dots, z_m)$, при $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{z_1, \dots, z_m\} = \emptyset$ преобразуется к виду

$$\bigvee_{\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m = 1} z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m} \mathfrak{N}_{\sigma_1 \dots \sigma_m}(x_1, \dots, x_n),$$

где $\mathfrak{N}_{\sigma_1 \dots \sigma_m}(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая д.н.ф., реализующая функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Следствие 2. Задача о построении кратчайшей д.н.ф. для булевых функций полиномиально сводима к приближенной задаче с точностью $t^{1-\varepsilon}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ (t — длина входного слова для приближенной задачи).

Лемма 2. Для любых булевых функций $\varphi(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ и $\psi(z_1, \dots, z_m) \neq 0$ от непересекающихся групп переменных по любой контактной схеме S , реализующей функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n) \& \psi(z_1, \dots, z_m)$, за полиномиальное время строятся контактные схемы S_φ и S_ψ , реализующие соответственно функции φ и ψ такие, что $L(S_\varphi) + L(S_\psi) \leq L(S)$.

Следствие 3. Задача о построении минимальной контактной схемы полиномиально сводима к приближенной задаче с точностью h для произвольной константы h .

Возможности применения теоремы о сводимости быстро уменьшаются по мере роста «силы» алгоритмов. Уже для класса схем из функциональных элементов пока вообще не удается применить теорему о сводимости из-за трудности разбиения схемы на непересекающиеся подсхемы.

б. Максимальная выполнимость к.н.ф. Задача заключается в нахождении наибольшего по мощности подмножества множества дизъюнкций конъюнктивной нормальной формы (к.н.ф.) такого, что конъюнкция дизъюнкций этого подмножества реализует булеву функцию, не равную тождественно 0. Это экстремальный вариант задачи «выполнить к.н.ф.», которая, как показано Куком ⁽³⁾, играет особую роль в вопросах полиномиальной сводимости.

Следствие 4. Задача «максимальная выполнимость к.н.ф.» полиномиально сводима к своей приближенной с точностью $t^{1-\varepsilon}$ (t — длина кода к.н.ф. в приближенной задаче) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.

в. Графовые задачи. Рассмотрим экстремальный вариант полиномиально полных проблем на графах из списка Карпа ⁽⁴⁾.

Следствие 5. Следующие задачи на графах сводятся к своим приближенным задачам с точностью $t^{1-\varepsilon}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ (t — число вершин в графе приближенной задачи):

- построение наибольшей клики,
- минимальная раскраска вершин,
- вершинное покрытие ребер (наименьшая опора),
- минимальное циклоразрушающее множество вершин (4),
- минимальное множество дуг, разрушающих все контуры (4),
- минимальное покрытие вершин кликами,
- гамильтонова цепь в ориентированном и неориентированном графах,
- максимальное сечение.

г. Задачи на конечных множествах.

Следствие 6. При любом фиксированном $\epsilon > 0$ следующие задачи сводимы к своим приближенным с точностью $t^{1-\epsilon}$ (t — длина кода множества):

максимальная упаковка множеств ⁽⁴⁾,
минимальное покрытие множеств подмножествами,
минимальное покрытие множеств без пересечений.

5. Результаты п. п. 3, 4 свидетельствуют о большой сложности приближенных алгоритмов с аддитивной точностью. Можно было бы надеяться на существование эффективных алгоритмов с мультипликативной точностью.

Для задачи P обозначим символом $P \cdot h$ (h — функция, отображающая N на N) задачу построения по x допустимого решения, отличающегося от оптимального не более чем в $h(\lg(x))$ раз (решения с мультипликативной точностью h).

Однако следующая теорема разрушает и эти надежды для некоторых задач.

Теорема 2. Пусть P — задача построения минимальной схемы управляющей системы ⁽⁹⁾, вычисляющей булеву функцию.

Тогда для любой функции $h(n) = O(\log n)$ имеет место «выполнимость к.н.ф.» $\leq P \cdot h$.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
21 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. В. Яблонский, Сб.: Проблемы кибернетики, в. 2, 75 (1959). ² Ю. И. Журавлев, Сб.: Проблемы кибернетики, в. 8, 5 (1962). ³ S. A. Cook, Conf. Rec. Third Ann. ACM Symp. Theory Comput., N. Y., 1971, p. 151. ⁴ R. M. Karp, Complexity Computer Computations, Proc. Symp., N. Y.—London, 1972, p. 85. ⁵ Л. А. Левин, Пробл. перед. информ., т. 9, № 3, 115 (1973). ⁶ О. Б. Лупанов, Сб.: Проблемы кибернетики, т. 10, 66 (1963). ⁷ И. Денев, Математические заметки, т. 16, № 5, 783 (1974). ⁸ D. S. Johnson, Proc. Fifth. Ann. ACM Symp. Theory Comput., N. Y., 1973, p. 38. ⁹ С. В. Яблонский, Сб.: Проблемы кибернетики, в. 2, 7 (1959).