

Л. И. ЧИБРИКОВА, М. Ф. КУЛАГИНА

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 14 XII 1973)

На основании теоремы Миттаг-Леффлера всякую мероморфную функцию $F(z)$ с простыми полюсами a_k , $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \infty$, и главными частями $c_k(z - a_k)^{-1}$ можно представить в виде

$$F(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z - a_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{m_k}, \quad (1)$$

где $P(z)$ — некоторая целая функция, а $m_k \geq 0$ — целые числа, подобранные так, чтобы ряд сходился абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, если в нем отбросить конечное число членов с полюсами из этой области. Определить вид $P(z)$ удастся лишь по некоторым дополнительным условиям, характеризующим поведение $F(z)$. Хорошо известными являются достаточные условия теоремы Коши (⁽¹⁾, стр. 398—400), при выполнении которых все m_k одинаковы; $m_k = m$, а $P(z)$ есть полином степени не выше $m-1$.

Нами установлена

Теорема 1. *Для того чтобы мероморфная функция $F(z)$ с простыми полюсами a_k и главными частями $c_k(z - a_k)^{-1}$ имела вид*

$$F(z) = P_{n_1-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z - a_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{n_k}, \quad (2)$$

где целые числа n_k , обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость ряда (2) в любом конечном круге $|z| \leq r$ (после отбрасывания членов, имеющих в этом круге полюсы), составляют возрастающую последовательность

$$n_k < n_{k+1}, \quad n_1 \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty, \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Gamma_q} F(z) z^{-j} dz = 0, \quad j = n_q + 1, \dots, n_{q+1}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

если интегрирование производится по любому замкнутому контуру Γ_q , не проходящему ни через один из полюсов и содержащему внутри себя $z=0$ и все a_k , $k \leq q$.

Необходимость доказывается непосредственным вычислением интегралов вида (4) на основании представления (2). При доказательстве достаточности мероморфная функция $F(z)$ по известным главным частям представляется в виде (1), все коэффициенты целой функции $P(z)$, кроме первых n_1 , определяются из условий (4), подставляются в (1), откуда после некоторых преобразований получается представление (2).

Эта теорема обобщается на кусочно-голоморфные функции со счетным множеством особых контуров $L_1, L_2, \dots$. Контур L_k будем считать гладки-

ми, замкнутыми, расположенными вне один другого так, что если R_k есть кратчайшее расстояние от начала координат до L_k , то

$$0 < R_1 \leq R_2 \leq \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty.$$

Функцию $\Phi(z)$ будем называть кусочно-голоморфной с линиями скачков $L_1, L_2, \dots$, если в любой ограниченной области, не содержащей точек множества $\{L_k\}$, она является аналитической, а на каждом из контуров L_k имеет граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ непрерывные по Гёльдеру всюду, кроме конечного числа точек, в которых допускается обращение в бесконечность интегрируемого порядка.

Следуя В. В. Голубеву (⁽²⁾, стр. 87–112), особую линию функции $\Phi(z)$ будем называть полярной линией первого порядка, если в ее окрестности $\Phi(z)$ отличается от интеграла типа Коши

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (5)$$

с плотностью

$$g_k(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad t \in L_k, \quad (6)$$

слагаемым, представляющим собой аналитическую функцию вблизи L_k и на L_k :

$$\Phi(z) = \Phi_k(z) + \Omega(z).$$

Интеграл $\Phi_k(z)$ называется главной частью этого представления.

Теорема 2. Для того чтобы кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, имеющая счетное множество полярных линий первого порядка с единственной точкой сгущения $z = \infty$ и с главными частями $\Phi_k(z)$ вблизи этих линий, имела вид

$$\Phi(z) = P_{n_1-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k} d\tau,$$

где целые числа n_k , обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость этого ряда, образуют последовательность со свойствами (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (4), где Γ_q есть замкнутый контур, содержащий внутри себя $z=0$ и все L_k при $k \leq q$.

Необходимость доказывается так же, как в теореме 1. При доказательстве достаточности аналог представления (1)

$$\Phi(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{m_k} d\tau$$

получаем как общее решение задачи (6) в классе кусочно-голоморфных функций (⁽³⁾, стр. 217–220).

Применим теоремы 1 и 2 при решении однородной задачи Римана

$$\Phi^+(t) = G_k(t) \Phi^-(t), \quad t \in L_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (7)$$

в одном из классов кусочно-голоморфных функций, считая функции $G_k(t)$ непрерывными по Гёльдеру, не обращающимися в нуль и такими, чтобы при некоторых целых n_k , удовлетворяющих условиям (3), ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta_k}{R_k} \left(\frac{z}{R_k}\right)^{n_k}, \quad \Delta_k = \max\{A_k, |\kappa_k|\}, \quad A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} |\ln G_k(\tau) d\tau|, \quad (8)$$

где κ_k — индекс $G_k(t)$, а $\ln G_k(t)$ означает вполне определенную фиксированную ветвь этой многозначной функции, сходящаяся абсолютно при любом конечном z . Отыскивать решения будем среди кусочно-голоморфных функ-

ций, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\Gamma_q} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-j} dz = 0, \quad j = n_q, \dots, n_{q+1}-1; \quad q = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где Γ_q — некоторый замкнутый контур, охватывающий $z=0$ и контуры L_k , $k \leq q$.

При указанных условиях функция $\exp \gamma(z)$, где

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau} \right)^{n_k} d\tau, \quad (10)$$

удовлетворяет краевым условиям (7). Ряд (8) является для ряда (10) мажорантным, так что ряд (10) сходится в любом конечном круге, если в нем отбросить члены, содержащие интегралы по L_k , лежащим в этом круге, и так как числа n_k удовлетворяют условиям (3), то в силу теоремы 2 функция $\gamma(z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\Gamma_q} \gamma(z) z^{-j} dz = 0, \quad j = n_q + 1, \dots, n_{q+1}; \quad q = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Допустим, что $\Phi(z)$ есть не обращающееся в нуль решение задачи (7). Функция $\psi(z) = \Phi(z) \exp[-\gamma(z)]$, как отношение двух функций, удовлетворяющих соотношениям (7), будет мероморфной. Ее нулями и полюсами порядков $|\kappa_k|$ будут точки t_k , принятые на контурах L_k за начало обхода; это сразу вытекает из свойств интегралов $\gamma_k(z)$ вида (5) с разрывной в t_k плотностью $\ln G_k(t)$,

$$\ln G_k(t_k - 0) - \ln G_k(t_k + 0) = 2\pi i \kappa_k.$$

Для логарифмической производной функции $\psi(z)$ точки t_k являются простыми полюсами, и так как на основании соотношений (9) и (11)

$$\int_{\Gamma_q} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} z^{-j} dz = \int_{\Gamma_q} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-j} dz - \int_{\Gamma_q} \gamma'(z) z^{-j} dz = 0, \\ j = n_q, \dots, n_{q+1}-1; \quad q = 1, 2, \dots,$$

то по теореме 1 функция $\psi'(z)/\psi(z)$ имеет такую форму:

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = P_{n_1-2}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\kappa_k}{z - t_k} \left(\frac{z}{t_k} \right)^{n_k-1} = P_{n_1-2}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k \left\{ \frac{1}{z - t_k} + \sum_{j=1}^{n_k-1} \frac{z^{j-1}}{t_k^j} \right\}.$$

Этот ряд равномерно сходится в любой ограниченной области, не содержащей точек t_k , что вытекает из сходимости ряда (8). Поэтому интегрированием вдоль любой кривой, не проходящей через t_k и соединяющей $z=0$ с произвольной точкой z , получим

$$\ln \psi(z) = P_{n_1-1}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k \left\{ \ln \left(1 - \frac{z}{t_k} \right) + \sum_{j=1}^{n_k-1} \frac{z^j}{j t_k^j} \right\} = \\ = P_{n_1-1}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k \ln E \left(\frac{z}{t_k}, n_k - 1 \right).$$

Отсюда потенцированием находим $\psi(z)$ и, вставив в формулу $\Phi(z) = \psi(z) \exp \gamma(z)$, получаем общее решение задачи (7), не имеющее нулей

и удовлетворяющее условиям (9):

$$\Phi(z) = \exp \{P_{n-1}(z) + \gamma(z)\} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\kappa_k} \left(\frac{z}{t_k}, n_k - 1 \right). \quad (12)$$

Решение задачи (7) с нулями в некоторых точках (даже если их счетное множество) получается таким же путем.

Формула (12) является аналогом представления мероморфной функции конечного порядка в виде бесконечного произведения по нулям и полюсам ((⁴), стр. 80).

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
14 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1958. ² В. В. Голубев, Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, 1961. ³ Л. И. Чибрикова, И. Г. Салехова, Тр. семинара по краевым задачам, в. 9, Изд-во Казанск. ун-та, 1972. ⁴ А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, 1970.