

УДК 513.015.7

МАТЕМАТИКА

Ф. А. БЕРЕЗИН, Д. А. ЛЕЙТЕС
СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 IV 1975)

1. В настоящей статье изучаются образования, аналогичные многообразиям, которые мы называем супермногообразиями (термин инспирирован физической литературой). Ту роль, которую в теории обычных многообразий играет коммутативная алгебра функций на многообразии, на супермногообразии берет на себя алгебра, являющаяся тензорным произведением коммутативной и внешней. Возможность построения содержательного аналога анализа, для которого элементы подобной алгебры играют роль функций, интуитивно ощущалась с момента определения интеграла по антикоммутирующим переменным и изучения его простейших свойств⁽¹⁾; в дальнейшем она подтвердилась рядом работ⁽²⁻⁶⁾. Дополнительным стимулом изучения рассматриваемого обобщения анализа служат роль групп суперсимметрий в квантовой теории поля⁽⁷⁾.

2. Пусть $U \subset R^p$ — открытое множество. $C(U)$ — алгебра бесконечно дифференцируемых функций на U со значениями в поле k вещественных или комплексных чисел. Обозначим через $A(U)$ алгебру, изоморфную $C(U)$, через $h: A(U) \rightarrow C(U)$ — изоморфизм. Пусть $x_i \in C(U)$ — координаты в U , $y_i = h^{-1}(x_i) \in A(U)$; элементы y_i являются топологическими образующими в $A(U)$. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_p) \in C(U)$. Определим $\varphi(y) = \varphi(y_1, \dots, y_p)$ согласно формуле $\varphi(y) = h^{-1}(\varphi) \in A(U)$. В силу этого определения, элементы $A(U)$ оказываются бесконечно дифференцируемыми функциями от образующих y_i . Пусть T — коммутативная алгебра. Обозначим через $\Lambda_T^q[\xi]$ внешнюю алгебру над T с q образующими $\xi_1, \dots, \xi_r$.

Положим $\mathfrak{A}_{p,q}(U) = \Lambda_{A(U)}^q[\xi]$. Алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ является, таким образом, алгеброй с p коммутирующими образующими y_i и q антикоммутирующими образующими ξ_j . Введем в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ Z_2 -градуировку g (четность), положив $g(y_i) = 0$, $g(\xi_i) = 1$. В дальнейшем всегда четные образующие будем обозначать латинскими буквами, нечетные — греческими. Элементы $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ по аналогии с функциями будем записывать в виде

$$f(y, \xi) = \sum f^{i_1, \dots, i_k}(y) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}. \quad (1)$$

Пусть M — гладкое многообразие размерности p . Предположим, что:

1) каждой координатной окрестности $U \subset M$ сопоставлена алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$;

2) существует гомоморфизм $h_U: \mathfrak{A}_{p,q}(U) \rightarrow \Lambda_{C(U)}^q[\xi]$, обладающий тем свойством, что $h_U(y_i) = x_i$, $h_U(\xi_i) = \xi_i$;

3) если $U \subset V$, то существует сохраняющий градуировку эпиморфизм $\rho_V^U: \mathfrak{A}_{p,q}(U) \rightarrow \mathfrak{A}_{p,q}(V)$, причем если $f \in \mathfrak{A}_{p,q}(U)$, то $(h_U(f))(x, \xi) = (h_V(\rho_V^U f))(x, \xi)$ при $x \in V$;

4) совокупность $\{\mathfrak{A}_{p,q}(U), \rho_V^U\}$ алгебр и отображений образует пучок. обозначим этот пучок через $\mathcal{O}_M^q$. Очевидно, что пучок $\mathcal{O}_M^0$ изоморфен пучку гладких функций на M .

Определение 1. Окольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_M^q)$ называется супермногообразием (с.м.).

Алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_M^q)$ является алгеброй локальных сечений пучка $\mathcal{O}_M^q$. Она является аналогом алгебры гладких функций, определенных в координатной окрестности обычного многообразия. Алгебра глобальных сечений $\Gamma(M, \mathcal{O}_M^q)$ является аналогом алгебры всех гладких функций на обычном многообразии.

Пусть $M' \subset M$ — подмногообразие размерности $p' \leq p$.

Координатную окрестность $U \subset M$ назовем достаточно мелкой, если либо $U' = U \cap M'$ является координатной окрестностью в M' , либо $U' = \emptyset$.

Определение 2. С.м. $(M', \mathcal{O}_{M'}^{q'})$ называется подсупермногообразием (п.с.м.) супермногообразия $(M, \mathcal{O}^q)$, если для каждой достаточно мелкой координатной окрестности $U \subset M$ существует эпиморфизм

$$t_U: \mathcal{O}_{p,q}(U) \rightarrow \mathfrak{A}_{p',q'}(U'), \quad U' = U \cap M',$$

причем $t_V \rho_V^U = \rho_{V'}^{U'} t_U$, где $V \subset U$, $V' = V \cap M'$, $\rho_V^U, \rho_{V'}^{U'}$ отображения ограничения пучков $\mathcal{O}_M^q$ и $\mathcal{O}_{M'}^{q'}$ соответственно.

Определение 3. Морфизмами супермногообразий называются морфизмы окольцованных пространств $(M, \mathcal{O}^q)$.

Определение 4. Произведением супермногообразий $(M_i, \mathcal{O}_{M_i}^{q_i})$, $i=1, 2$, называется супермногообразие $(M_1 \times M_2, \mathcal{O}_{M_1}^{q_1} \otimes \mathcal{O}_{M_2}^{q_2})$ ($\mathcal{O}_{M_1}^{q_1} \otimes \mathcal{O}_{M_2}^{q_2}$ определяется с использованием градуированного произведения градуированных алгебр).

Пусть $U_1, U_2 \subset M$ — координатные окрестности, причем $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Выберем в алгебрах $\mathfrak{A}_{p,q}(U_1)$ и $\mathfrak{A}_{p,q}(U_2)$ образующие x_i, ξ_j и y_i, η_j соответственно; их образы в $\mathfrak{A}_{p,q}(U_{12})$ при гомоморфизмах вложения $\rho_{U_{12}}^{U_1}$ и $\rho_{U_{12}}^{U_2}$

обозначим прежними буквами. Ввиду того, что $\rho_{U_{12}}^{U_1} \mathfrak{A}_{p,q}(U_1) = \rho_{U_{12}}^{U_2} \mathfrak{A}_{p,q}(U_2) = \mathfrak{A}_{p,q}(U_{12})$, как элементы x_i, ξ_j , так и y_i, η_j служат образующими в $\mathfrak{A}_{p,q}(U_{12})$. Следовательно, одни из них выражаются через другие:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1 < \dots < i_{2k}} f_i^{i_1, \dots, i_{2k}}(y) \eta_{i_1} \dots \eta_{i_{2k}} \\ \xi_j &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j_1 < \dots < j_{2k+1}} \varphi_j^{j_1, \dots, j_{2k+1}}(y) \eta_{j_1} \dots \eta_{j_{2k+1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношения (2) являются аналогом координатного преобразования в обычной теории многообразий.

3. Пусть $(x, \xi), (y, \eta)$ — две системы образующих в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, связанные соотношением (2).

Определение 5. Величина $\rho(x, \xi) \in \mathfrak{A}_{p,q}(U)$, зависящая от выбора системы образующих, называется локальной плотностью над U , если

$$\rho(x, \xi) = \rho(y, \eta) \det(A - BD^{-1}C) \det D^{-1}, \quad (3)$$

где

$$A = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\|, \quad B = \left\| x_i \frac{\partial}{\partial y_j} \right\|, \quad C = \left\| \frac{\partial \xi_m}{\partial y_j} \right\|, \quad D = \left\| \frac{\partial \xi_m}{\partial \eta_k} \right\|$$

($x_i \partial / \partial \eta_k$ — правая производная). Совокупность локальных плотностей над U обозначим через $\mathfrak{D}_{p,q}(U)$. Очевидно, что $\mathfrak{D}_{p,q}(U)$ является модулем над $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$. К плотностям применимы отображения ограничения ρ_V^U , порождающие пучок $\mathcal{D}^q$. Совокупность плотностей вместе с отображениями ρ_V^U образует пучок, который мы обозначим через $\mathcal{D}_M^q$. Элементы $\mathfrak{D}_{p,q}(U)$ служат его локальными сечениями; его глобальные сечения будем называть глобальными плотностями.

Пусть (y, ξ) — образующие в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, $x_i = h(y_i)$ — координаты в $\mathcal{U}$. $\rho(y, \xi) \in \mathfrak{D}_{p,q}(U)$, $\mu(x, \xi) = (h\rho)(x, \xi) \in \Lambda_{\mathcal{U}}[\xi]$. Положим

$$\int \rho(y, \xi) dy d\xi = \int \mu(x, \xi) dx_1 \dots dx_p d\xi_q \dots d\xi_1. \quad (4)$$

Интеграл по dx в правой части (4) понимается в обычном смысле, по $d\xi$ — в смысле работы ⁽¹⁾. Для глобальной плотности определим интеграл по $dy d\xi$ с помощью разбиения единицы и последующего сведения к локальной плотности.

Теорема 1. *Интеграл (4) не зависит от выбора системы образующих в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$. Интеграл от глобальной плотности не зависит от выбора разбиения единицы.*

4. Пусть $\Sigma = \{f_i, \varphi_j\} \subset \mathfrak{A}_{p,q}(\mathbb{R}^p)$ — конечная совокупность элементов, причем $g(f_i) = 0$, $g(\varphi_j) = 1$. Множество Σ порождает в $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbb{R}^q)$ двусторонний идеал $I(\Sigma)$. Пусть y_i — четные образующие в $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbb{R}^p)$, $x_i = h(y_i)$ — координаты в $\mathbb{R}^p$. Обозначим через M_Σ множество решений системы уравнений $f_i(x, 0) = 0$. Рассмотрим матрицы частных производных $A(x, \xi) = \|\partial f_i / \partial x_j\|$, $D(x, \xi) = \|\partial \varphi_m / \partial \xi_k\|$. Систему Σ назовем невырожденной, если $M_\Sigma \neq \emptyset$ и ранги матриц $A(x, 0)$ и $D(x, 0)$ не зависят от x при $x \in M_\Sigma$. Отметим, что в этом случае M_Σ является многообразием размерности $p - \alpha$, где $\alpha = \text{rank } A(x, 0)$.

Теорема 2. *Если система Σ невырождена, то фактор-алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbb{R}^p)/I(\Sigma)$ изоморфна алгебре глобальных сечений на некотором с.м. $(M_\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\beta)$, причем $\beta = q - q_1$, $q_1 = \text{rank } D(x, 0)$. Алгебра, растущая над точкой $x \in M_\Sigma$, является локализацией $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbb{R}^p)/I(\Sigma)$ по простому идеалу, порожденному точкой $x \in M_\Sigma$.*

О с.м. $(M_\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\beta)$ естественно говорить, что оно выделяется уравнениями $f_i(x, \xi) = 0$, $\varphi_j(x, \xi) = 0$. По-видимому, всякое с.м. может быть получено таким образом.

5. **Определение 6.** Супергруппой Ли называется групповой объект в категории супермногообразий.

Теорема 3. *Если с.м. $(M, \mathcal{O}^q)$ является супергруппой Ли, то M является группой Ли, $\mathcal{O}^q \simeq \mathcal{O}_M^0 \otimes \Lambda[\xi_1, \dots, \xi_q]$.*

Положим для краткости $\mathfrak{A} = \Gamma(M, \mathcal{O}^q)$.

Теорема 4. *С.м. $(M, \mathcal{O}^q)$ тогда и только тогда является супергруппой Ли, когда существуют отображения*

$$\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}, \quad \eta: k \rightarrow \mathfrak{A}, \quad \varepsilon: \mathfrak{A} \rightarrow k, \quad \theta: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}, \quad \varepsilon \eta = I,$$

причем η является мономорфизмом, ε — эпиморфизмом и θ — изоморфизмом и следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \alpha \otimes \alpha & & \alpha \\ \varphi \swarrow & & \downarrow I \otimes \varphi \\ \alpha & & \alpha \otimes \alpha \otimes \alpha \\ \varphi \searrow & & \uparrow \varphi \otimes I \\ \alpha \otimes \alpha & & \alpha \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \alpha & & \alpha \\ I \uparrow & & \downarrow \varphi \\ \alpha & & \alpha \otimes \alpha \\ & & \uparrow I \otimes \varepsilon \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \alpha \otimes \alpha & \xrightarrow{I \otimes \varepsilon} & \alpha \otimes \alpha \\ \downarrow \varphi & & \downarrow d \\ \alpha & \xrightarrow{\varepsilon} k \xrightarrow{\eta} & \alpha \end{array} \quad (5)$$

здесь d — умножение в $\mathfrak{A}$, I — тождественное отображение.

Супералгеброй Ли будем называть $\mathbb{Z}_2$ -градуированную алгебру Ли в смысле работ ^(8, 4).

Пусть $(G, \mathcal{O}^q)$ — супергруппа Ли, $\mathfrak{A}_0$ — стебель пучка $\mathcal{O}^q$ в единице G . $\hat{\mathfrak{A}}_0$ является алгеброй формальных степенных рядов от p коммутирующих и q антикоммутирующих образующих. Отображения $\varphi, \varepsilon, \eta, d, \theta$, участвующие в формулировке теоремы 4, естественным образом продолжаются по соответствующим отображениям $\hat{\mathfrak{A}}_0$. Сохраним за этими отображениями прежние обозначения.

Теорема 5. Алгебра $\hat{\mathfrak{A}}$ совместно с отображениями $\varphi, \varepsilon, d, \eta$, описывает формальную супергруппу Ли в смысле работы (*).

В (*) построен алгоритм, связывающий формальные супергруппы Ли и супералгебры Ли.

Таким образом, теорема 5 позволяет сопоставить каждой супергруппе Ли $(G, \mathcal{O}^q)$ супералгебру Ли $\mathfrak{G}$; супералгебру Ли $\mathfrak{G}$ мы будем называть супералгеброй Ли группы $(G, \mathcal{O}^q)$.

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{G}$ — супералгебра Ли. Существует семейство $(G_n, \mathcal{O}^q)$ супергрупп Ли, имеющих $\mathfrak{G}$ своей супералгеброй, причем: 1) группы G_n локально изоморфны между собой, 2) супергруппа $(G_n, \mathcal{O}^q)$ однозначно определяется группой G_n .

Пусть $(M, \mathcal{O}_{M^q})$ — произвольное с.м.

Определение 7. Линейный оператор L в $\Gamma(M, \mathcal{O}_{M^q})$ называется левым обобщенным дифференцированием степени $g(L)$, если для однородных $a, b \in \Gamma(M, \mathcal{O}_{M^q})$

$$L(ab) = L(a)b + (-1)^{g(L)g(a)} aL(b).$$

Аналогично определяется правое обобщенное дифференцирование:

$$L(ab) = L(a)b(-1)^{g(L)g(b)} + aL(b).$$

Как левые, так и правые обобщенные дифференцирования образуют супералгебру Ли относительно операции

$$[L_1, L_2] = L_1 L_2 - (-1)^{g(L_1)g(L_2)} L_2 L_1. \quad (6)$$

Если с.м. является супергруппой, введем дополнительные определения.

Определение 8. Обобщенное дифференцирование L (правое или левое, безразлично) называется право- или левоинвариантным, если соответственно $\varphi(Lf) = L \otimes I(\varphi f)$ или $\varphi(Lf) = I \otimes L(\varphi f)$, где φ — отображение, участвующее в формулировке теоремы 4, $f \in \mathfrak{A}$.

Теорема 7. Левые правоинвариантные и правые левоинвариантные обобщенные дифференцирования на супергруппе $(G, \mathcal{O}^q)$ образуют супералгебры Ли относительно операции (6). Эти супералгебры изоморфны между собой и изоморфны супералгебре Ли супергруппы $(G, \mathcal{O}^q)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. А. Березин, ДАН, т. 137, № 2, 311 (1961). ² Ф. А. Березин, Метод вторичного квантовая «Наука», 1965. ³ Ф. А. Березин, Математические заметки, т. 1, в. 3, 269 (1967). ⁴ Ф. А. Березин, Г. И. Кац, Математич. сб., т. 82, № 3, 343 (1970). ⁵ В. Ф. Пахомов, Математические заметки, т. 16, в. 1, 65 (1974). ⁶ Д. А. Лейтес, УМН, т. 29, в. 3, 209 (1974). ⁷ J. Wess, B. Zumino, Nucl. Phys., Ser. B, v. 24, 39 (1974). ⁸ J. W. Milnor, J. C. Moore, Ann. Math. (2), v. 81, 211 (1965).