

Л. А. БИРЮКОВА

О l -ПОЛНОТЕ ФУНКЦИЙ С ЗАДЕРЖКАМИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 16 IV 1975)

В заметке рассматриваются вопросы полноты для одного класса автоматов без обратных связей, так называемых функций с задержками *. Исследуемые вопросы полноты примыкают к вопросам, рассмотренным в работе ⁽¹⁾, и завершают результаты этой работы.

Для того чтобы более точно определить задачу и сформулировать результаты, введем некоторые понятия и определения. Множество всех пар вида $(f(x_1, \dots, x_n), \tau)$, где $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, а $\tau = \{0, 1, \dots, l\}$, обозначим через $\hat{P}_2$. Иногда пару (f, τ) будем называть функцией f с задержкой τ . Пусть $\mathfrak{N}$ — система функций с задержками из $\hat{P}_2$. Введем понятие операции синхронной суперпозиции над этой системой.

Определение (индуктивное). 1) Всякая функция из $\mathfrak{N}$ является синхронной суперпозицией над $\mathfrak{N}$.

2) Если $(f(x_1, \dots, x_n), \tau)$ — пара из системы $\mathfrak{N}$, $0 \leq \tau \leq l$, а $G_1, \dots, G_n$ — функции, являющиеся синхронной суперпозицией функций с нулевой задержкой над $\mathfrak{N}$, или переменные, то пара $(f(G_1, \dots, G_n), \tau)$ является синхронной суперпозицией над $\mathfrak{N}$.

3) Если $(f(x_1, \dots, x_n), \tau_1)$ — пара из системы $\mathfrak{N}$, $(g_1(x_1, \dots, x_m), \tau_2), \dots, (g_n(x_1, \dots, x_m), \tau_2)$ — функции, являющиеся синхронной суперпозицией над $\mathfrak{N}$, то пара $(f(g_1, \dots, g_n), \tau_1 + \tau_2)$, где $\tau_1 + \tau_2 \leq l$, является синхронной суперпозицией над $\mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{B} \equiv \hat{P}_2$. Множество всех синхронных суперпозиций над $\mathfrak{B}$ назовем замыканием $\mathfrak{B}$ и обозначим $[\mathfrak{B}]$.

Определение. Систему $\mathfrak{B}$ будем называть l -полной, если $[\mathfrak{B}]$ содержит все пары с задержками, равными l .

Для обозначения функций, входящих в $[\mathfrak{B}]$ с нулевой задержкой, будем использовать запись $\mathfrak{M}_{[\mathfrak{B}]}$.

Введем следующие обозначения для множеств, которые нам в дальнейшем понадобятся ⁽¹⁾:

A — все α -функции;

B — все β -функции;

Γ — все γ -функции;

Δ — все δ -функции;

A_1 — все монотонные функции;

$\bar{A}_1$ — все функции, являющиеся отрицанием монотонных функций;

D_2 — все самодвойственные монотонные функции;

F_2^∞ — все монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\infty \rangle$;

P_1 — все логические произведения;

P_3 — все логические произведения и все функции, равные 0;

P_5 — все логические произведения и все функции, равные 1;

P_6 — все логические произведения и все функции, равные 0 или 1.

* Все понятия, которые не определяются здесь, можно найти в ⁽¹⁾⁻⁽³⁾.

Через F_6^∞ , S_1 , S_3 , S_5 , S_6 обозначим множества, соответственно двойственные множествам F_2^∞ , P_1 , P_3 , P_5 , P_6 .

Введенные обозначения будем использовать в несколько измененном виде для обозначения подмножеств из $\hat{P}_2$. Пусть $\mathfrak{M}$ — любое из только что рассмотренных множеств функций, тогда через $\mathfrak{M}$ обозначим множество всех пар (f, τ) таких, что $f \in \mathfrak{M}$.

В работе ⁽¹⁾ установлены необходимые и достаточные условия 1-полноты конечных систем функций с задержками, показано существование алгоритма, устанавливающего 1-полноту любой конечной системы. Оказалось, что для 1-полных систем требуется, чтобы множество $\mathfrak{M}_{[3]}$ было не уже хотя бы одного из классов F_2^∞ , D_2 , F_6^∞ диаграммы Поста ⁽²⁾. С другой стороны, для произвольного $l > 1$ требуется, чтобы это множество было не уже хотя бы одного из классов S_1 , D_2 , P_1 . Эта ситуация возникает тогда, когда в произвольной l -полной системе содержатся отличные от констант функции с ненулевыми задержками, строго меньшими l .

Можно показать, что если множество $\mathfrak{M}_{[3]}$ включает в себя одно из множеств F_2^∞ , F_6^∞ или D_2 , то система $\mathfrak{B}$ l -полна тогда и только тогда, когда множество функций, входящих в $[3]$ с задержкой l , содержит функции всех типов (α -, β -, γ - и δ -функции). Поэтому отдельно требуется рассмотреть случаи, когда множество $\mathfrak{M}_{[3]}$ совпадало или было шире множеств S_1 , P_1 , но было уже, чем F_2^∞ и F_6^∞ . Из соображений двойственности достаточно рассмотреть четыре случая, когда $\mathfrak{M}_{[3]} = P_1$, $\mathfrak{M}_{[3]} = P_3$, $\mathfrak{M}_{[3]} = P_5$, $\mathfrak{M}_{[3]} = P_6$.

В работе получены следующие результаты.

Теорема 1. Для того чтобы конечная система $\mathfrak{B} \subset \hat{P}_2$, в которой $\mathfrak{M}_{[3]} = P_6$, была l -полной, необходимо и достаточно, чтобы в $[3]$ содержались такие пары (f_1, l_1) , (f_2, l_2) и (f_3, l_2) , что

$$l_1 + l_2 = l, \quad f_1 \notin A_1, \quad f_3 \notin A_1, \quad f_2 \notin \bar{A}_1.$$

Теорема 2. Для того чтобы конечная система $\mathfrak{B} \subset \hat{P}_2$, в которой $\mathfrak{M}_{[3]} = P_3$ была l -полной, необходимо и достаточно, чтобы в $[3]$ существовало множество $\{\{(f_i, l_1)\}, \{(\varphi_j, l_2)\}\}$ такое, что

$$l_1 + l_2 = l, \quad \{\{f_i\} \cup \{\varphi_j\}\} \neq \bar{A}_1, \quad \{f_i\} \neq A_1, \quad \{\varphi_j\} \neq A_1,$$

в множестве $\{f_i\} \cup \{\varphi_j\}$ существовала функция, отличная от функций типов α , γ и константы 1.

Теорема 3. Для того чтобы конечная система $\mathfrak{B} \subset \hat{P}_2$, в которой $\mathfrak{M}_{[3]} = P_5$, была l -полной, необходимо и достаточно, чтобы в $[3]$ существовало множество $\{\{(f_i, l_1)\}, \{(\varphi_j, l_2)\}\}$ такое, что

$$l_1 + l_2 = l, \quad \{\{f_i\} \cup \{\varphi_j\}\} \neq \bar{A}_1, \quad \{f_i\} \neq A_1, \quad \{\varphi_j\} \neq A_1,$$

а в множестве $\{f_i\} \cup \{\varphi_j\}$ существовала функция, отличная от функций типов α , β и константы 0.

Теорема 4. Для того чтобы конечная система $\mathfrak{B} \subset \hat{P}_2$, в которой $\mathfrak{M}_{[3]} = P_1$ была l -полной, необходимо и достаточно, чтобы в $[3]$ существовали с задержкой l функции всех типов, существовало множество $\{\{(f_i, l_1)\}, \{(\varphi_j, l_2)\}\}$ такое, что

$$l_1 + l_2 = l,$$

а множества $\{f_i\}$, $\{\varphi_j\}$ удовлетворяли следующим условиям:

- 1) $\{f_i\} \neq A_1$, $\{\varphi_j\} \neq A_1$;
- 2) $\{f_i\} \cup \{\varphi_j\} \neq A_1$;
- 3) $\{f_i\} \cup \{\varphi_j\} \neq A \cup B \cup \Gamma$;
- 4) $\{f_i\} \cup \{\varphi_j\} \neq \Delta \cup \{1\}$;
- 5) $\{f_i\} \neq A \cup \Gamma \cup \{1\}$ либо $\{\varphi_j\} \neq A \cup \Gamma \cup \Delta$;
- 6) $\{f_i\} \neq A \cup B \cup \{0\}$ либо $\{\varphi_j\} \neq B \cup \Delta$;
- 7) $\{f_i\} \neq A \cup B \cup \Gamma$ либо $\{\varphi_j\} \neq \Delta$;
- 8) $\{f_i\} \neq A_1 \setminus \{0\}$ либо $\{\varphi_j\} \neq \Delta \cup \{0, 1\}$;
- 9) $\{f_i\} \neq A \cup \Gamma \cup \Delta$ либо $\{\varphi_j\} \neq A \cup \Gamma \cup \{1\}$;
- 10) $\{f_i\} \neq B \cup \Delta$ либо $\{\varphi_j\} \neq A \cup B \cup \{0\}$;
- 11) $\{f_i\} \neq \Delta$ либо $\{\varphi_j\} \neq A \cup B \cup \Gamma$;
- 12) $\{f_i\} \neq \Delta \cup \{0, 1\}$ либо $\{\varphi_j\} \neq \bar{A}_1 \setminus \{0\}$.

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР С. В. Яблонскому, под руководством которого была выполнена работа.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. А. Бирюкова, В. Б. Кудрявцев. Сб.: Проблемы кибернетики, в. 23, 1970, стр. 5. ² С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев, Функции алгебры логики и классы Поста, 1966. ³ E. L. Post, Two-valued Iterative Systems, 1941.