

УДК 51:65.012.122

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Р. А. СМОЛКИН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 23 I 1975)

Рассматривается семейство преобразований двух графов. Преобразование заключается в совместно протекающих во времени построении одного графа и уничтожении другого. Задача поиска оптимального преобразования сведена к последовательности рекуррентно определяемых задач поиска каждого элементарного шага преобразования. Приведен алгоритм решения этих задач.

1. Пусть Γ^1 — граф, который следует построить, Γ^2 — граф, который следует уничтожить. Оба графа неориентированы, односвязны и являются деревьями. $\Gamma^1 = (A, W^1)$, $\Gamma^2 = (A, W^2)$, где A — множество вершин, общее для обоих графов, W^1, W^2 — множества дуг, $W^1 \cap W^2 = \Lambda$. Обозначим через $\Gamma^i(z)$, где $z \in A$, $i=1, 2$, минимальный односвязный подграф графа Γ^i , содержащий вершины z и фиксированную вершину a^i . Множество дуг графа $\Gamma^i(z)$ обозначим через $W^i(z)$. Подмножества множества A назовем *планами*. Вершины и дуги графов Γ^1, Γ^2 характеризуются числами k_a^i, k_w (капиталоемкостями) и c_a^i, c_w (эксплуатационными расходами), $i=1, 2, w \in W \equiv W^1 \cup W^2, a \in A, k_w \geq 0, c_w \geq 0$. Каждый план y характеризуется числами $K(y), C(y)$,

$$K(y) = \sum_{a \in y} k_a^1 + \sum_{a \in A \setminus y} k_a^2 + \sum_{w \in W^1(y)} k_w, \quad C(y) = \sum_{a \in y} c_a^1 + \sum_{a \in A \setminus y} c_a^2 + \sum_{w \in W(y)} c_w,$$

где $W(y) = W^1(y) \cup W^2(A \setminus y)$. В каждый момент времени построенная часть графа Γ^1 и сохранившаяся часть графа Γ^2 однозначно определяются некоторым планом y соответственно как $\Gamma^1(y)$ и $\Gamma^2(A \setminus y)$.

Последовательность планов $\xi = (y_0, y_1, \dots, y_{m(\xi)})$, где $m(\xi)$ — произвольное натуральное число, назовем *очередностью* (преобразования), если:

1а) $y_{i-1} \subset y_i, y_{i-1} \neq y_i, i=1, 2, \dots, m(\xi)$;

1б) $y_0 = \Lambda, y_{m(\xi)} = A$.

Каждое преобразование определяется некоторой очередностью ξ , протекает на отрезке времени $[K(\Lambda), K(A)]$ и заключается в том, что на открытом справа интервале времени $[K(y_{i-1}), K(y_i)], i=1, 2, \dots, m(\xi)$ построенная и сохранившаяся части графов Γ^1, Γ^2 определяются планом y_{i-1} . Задача заключается в поиске очередности, максимизирующей

$$h(\xi) = \sum_{i=1}^{m(\xi)} (K(y_i) - K(y_{i-1})) (C(A) - (C(y_i) + C(y_{i-1}))/2).$$

2. Относительно исходных данных будем предполагать, что:

2а) $C(A) < C(y)$ при любом $y, y \neq A$;

2б) если $y \subset z, y \neq z$, то $K(y) < K(z)$.

Можно доказать, что:

3а) $K(y) + K(z) \geq K(y \cup z) + K(y \cap z)$,

3б) $C(y) + C(z) \geq C(y \cup z) + C(y \cap z)$.

Вся необходимая нам специфика задачи содержится в свойствах 2), 3), поэтому в дальнейшем, кроме п. 5, будем использовать только агрегированные показатели $K(y)$, $C(y)$, $y \in A$.

3. На плоскости рассмотрим семейство $\mathcal{L}$ точек с координатами $(K(y), C(y))$ для всех y , $y \in A$, и $(K(\Lambda), M)$, $(K(A), M)$, где $M > C(y)$ при всех y . Каждой последовательности планов $\xi = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ поставим в соответствие многоугольник $\mathcal{L}(\xi)$, определяемый ломаной линией с вершинами $(K(y_0), C(y_0))$, $(K(y_1), C(y_1))$, $\dots$, $(K(y_m), C(y_m))$, $(K(A), M)$, $(K(\Lambda), M)$; его площадь равна $h(\xi) + (K(A) - K(\Lambda))(M - C(\Lambda))$. Следовательно, наша задача эквивалентна поиску очередности, которой соответствует многоугольник наибольшей площади. Введем $V(\mathcal{L})$ — выпуклую оболочку семейства $\mathcal{L}$. Основой для решения задачи служит следующая

Теорема. Существует такая очередность $\xi^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_m^*)$, что соответствующий ей многоугольник совпадает с $V(\mathcal{L})$.

Так как $V(\mathcal{L})$ имеет наибольшую площадь, то ξ^* — оптимальная очередность. Введем $T(y, z) = (K(z) - K(y)) / (C(y) - C(z))$. Заметим, что $T(y, z) = \operatorname{ctg} \alpha$, где α — угол наклона к оси K отрезка, соединяющего точки $(K(y), C(y))$ и $(K(z), C(z))$. Из теоремы вытекает

Следствие 1. Для того чтобы многоугольник, соответствующий последовательности планов $y_0, y_1, \dots, y_m$, совпадал с $V(\mathcal{L})$, необходимо и достаточно, чтобы:

- а) $y_0 = \Lambda$;
- б) $y_m = A$;
- в) $T(y_{i-1}, y_i) = \min_{y \in L_i^+} T(y_{i-1}, y)$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, где $L_i^+ = \{y: y \in A, K(y) > K(y_{i-1}), C(y) < C(y_{i-1})\}$.

Условие (в) можно заменить следующим условием:

- в*) $T(y_i, y_{i+1}) = \max_{y \in L_i^-} T(y, y_{i+1})$ для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$, где $L_i^- = \{y: y \in A, K(y) < K(y_{i+1}), C(y) \neq C(y_{i+1})\}$.

Следствие 1 сводит решение задачи к решению последовательности вспомогательных задач, каждая из которых определяет лишь один из планов оптимальной очередности, причем для определения каждой последующей задачи необходимо знать лишь решение предыдущей.

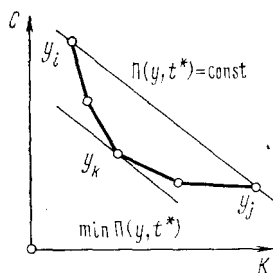


Рис. 1

4. Для построения вычислительной процедуры представляется более целесообразным воспользоваться дополнительными свойствами задачи, позволяющими планы оптимальной очередности, отождествляемые с крайними точками $V(\mathcal{L})$, искать с помощью построения прямых, опорных для $V(\mathcal{L})$. Введем $\Pi(y, t) = K(y) + tC(y)$. При фиксированном t^* уравнение $\Pi(y, t^*) = \operatorname{const}$ задает семейство параллельных прямых, одна из которых является опорной для $V(\mathcal{L})$ (см. рис. 1).

Следствие 2. Для того чтобы последовательность планов $y_0, y_1, \dots, y_m$ была решением задачи и каждый ее член соответствовал крайней точке $V(\mathcal{L})$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$, что:

- а) $\lambda_0 = 0$;
- б) $\lambda_{m+1} = +\infty$;
- в) $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ для $i = 0, 1, \dots, m$;
- г) для любого i , $0 \leq i \leq m$, и любого t , $\lambda_i < t < \lambda_{i+1}$, выполняется равенство $\Pi(y_i, t) = \min_{y \in A} \Pi(y, t)$.

Заметим, что $\lambda_i = T(y_{i-1}, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Из следствия 2 вытекает, что каждый план оптимальной очередности является решением задачи $\min_{y \in A} \Pi(y, t)$ при любом t из интервала $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$.

где i — номер плана в оптимальной очередности. Укажем алгоритм определения одной из точек этих интервалов.

Следствие 3. Пусть $y_0, y_1, \dots, y_m$ — оптимальная очередность, каждый план которой соответствует крайней точке $V(\mathcal{L})$; пусть $1 \leq i+1 < j \leq m$.

Тогда любая точка, достаточно близкая к $t^* = T(y_i, y_j)$, является внутренней для одного из интервалов $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$, $i < k < j$.

Следствие 3 имеет отчетливую геометрическую интерпретацию. Каждая прямая (см. рис. 1) из семейства $\Pi(y, t) = \text{const}$ параллельна прямой, соединяющей точки $(K(y_i), C(y_i))$ и $(K(y_j), C(y_j))$. Решение задачи $\min_{y \in A} \Pi(y, t^*)$ определяет прямую, опорную к $V(\mathcal{L})$. Если эта прямая про-

ходит только через одну вершину $V(\mathcal{L})$, то t^* является внутренней точкой для одного из интервалов $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$, $i < k < j$. В противном случае $t^* = \lambda_k$ при некотором k , $i < k < j$. Таким образом, следствия 2, 3 указывают способ отыскания плана, входящего в оптимальную очередность и расположенного между двумя уже известными планами. Так как первый и последний планы оптимальной очередности фиксированы условием 1б), то следствия 2, 3 определяют алгоритм отыскания всех планов оптимальной очередности.

5. Для решения задач $\min_{y \in A} \Pi(y, t)$ можно рекомендовать метод ветвей

и границ. Коротко укажем особенности его использования в нашей задаче. Пусть $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 \cap x_2 = \Lambda$. Обозначим через (x_1, x_2) множество планов z , для которых $x_1 \subset z$, $x_2 \subset A \setminus z$. Заметим, что

4а) (Λ, Λ) содержит все планы.

Если $a \in B = A \setminus (x_1 \cup x_2)$, то

4б) $(x_1, x_2) = (x_1 \cup a, x_2) \cup (x_1, x_2 \cup a)$;

4в) $(x_1 \cup a, x_2) \cap (x_1, x_2 \cup a) = \Lambda$.

Эти свойства определяют схему «ветвления»: начиная с множества всех планов (Λ, Λ) , последовательно применяя формулу 4б) для построения все более мелких подмножеств, можно получить любой план.

Так как для всех планов из (x_1, x_2) вершины из $x_1 \cup x_2$ фиксируют некоторые элементы построенной и сохранившейся частей графов Γ^1, Γ^2 , то сумма соответствующих им слагаемых целевой функции равна

$$\Pi^*(x_1, x_2) = \sum_{i=1,2} \left(\sum_{a \in x_i} \pi_a^i + \sum_{w \in W^i(x_i)} \pi_w \right),$$

где $\pi_a^i = k_a^i + t c_a^i$, $\pi_w = k_w + t c_w$. Для вершин a , $a \in B$, определим числа $\gamma(a, x_1, x_2) = \min_{i=1,2} (\pi_a^i + \pi'_{w(a,i)})$, где $w(a, i)$ — дуга графа Γ^i , инцидентная вершине a и пути, соединяющему вершины a и a^i , $\pi_w' = \pi_w$, если дуга w в рассматриваемый момент времени t не существует, в противном случае $\pi_w' = 0$.

Число $\gamma(a, x_1, x_2)$ является оценкой снизу изменения целевой функции, вызванного присоединением вершины a либо к строящемуся, либо к уничтожаемому графу. В качестве нижней оценки функции $\Pi(y, t)$ на множестве планов (x_1, x_2) можно взять величину

$$\alpha(x_1, x_2) = \Pi^*(x_1, x_2) + \sum_{a \in B} \gamma(a, x_1, x_2).$$

Заметим, что $\alpha(x_1 \cup a, x_2)$, $\alpha(x_1, x_2 \cup a)$ вычисляются через $\alpha(x_1, x_2)$. Действительно,

$$\alpha(x_1 \cup a, x_2) = \alpha(x_1, x_2) + \sum_{w \in W^0} \pi_w + \sum_{b \in A^0} (\gamma(b, x_1 \cup a, x_2) - \gamma(b, x_1, x_2)),$$

где W^0 — множество дуг графа Γ^1 , составляющих путь от вершины a до $\Gamma^1(x_1)$, A^0 — множество вершин, инцидентных W^0 . В качестве верхней

оценки решения задачи можно взять значение целевой функции на любом плане.

Замечание 1. Функция $\Pi(y, t)$ удовлетворяет условиям (3). Однако предложенный в ⁽¹⁾ метод максимизации таких функций оказывается неприменимым для интересующей нас задачи минимизации $\Pi(y, t)$.

Замечание 2. Изложенная задача первоначально возникла при определении очередности строительства газопроводной сети ⁽²⁾. Предлагаемая методика была опробована в экспериментальном порядке на материалах генеральной схемы газоснабжения Алма-Атинской области, разработанных институтом Ленинпроект.

Замечание 3. В задачах сравнения вариантов экономических решений часто используется критерий, содержащий как слагаемые приведенные во времени капитальные вложения и эксплуатационные затраты. Если предположить, что выделяемые для строительства капиталовложения осваиваются равномерно во времени, то величина приведенных капиталовложений не зависит от очередности строительства. Существование резкой разницы экономической эффективности отдельных частей схемы газоснабжения позволяет сделать вывод, что приведение во времени эксплуатационных затрат слабо влияет на выбор оптимальной очередности. Следовательно, очередность строительства можно выбирать, руководствуясь минимумом эксплуатационных расходов за период строительства или рассматриваемым в работе максимумом экономии этих расходов.

Замечание 4. Следствие 1, примененное к задаче, указанной в замечании 2, утверждает, что для каждого последующего шага строительства следует выбирать ту часть графа Γ^1 , которая имеет наименьший период окупаемости дополнительных капиталовложений.

Автор благодарит Е. И. Берхмана, привлечшего его к этой тематике, Г. В. Епифанова, Б. Г. Питтеля, И. В. Романовского, О. Г. Фаянса за обсуждение работы и полезные советы при подготовке работы к опубликованию.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-математического института
Академии наук СССР

Поступило
24 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Черенин, В. Р. Хачатуров, Сб. Экономико-математические методы М., в. 2, 1965, стр. 279. ² Е. И. Берхман, Р. А. Смолкин, Сб.: Экономика газовой промышленности, М., в. 10, 1972, стр. 25.