

П. С. СОЛТАН

АНАЛОГИ ПРАВИЛЬНЫХ СИМПЛЕКСОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 I 1975)

В эвклидовом пространстве E_n размерности n множество точек $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_t\}$, расстояние между каждыми двумя из которых одинаково, определяет n -мерный правильный симплекс $T = \text{conv } A$ (¹). В этом случае максимальное значение t равно n . Естественным образом возникают вопросы: 1) что представляет собой $\text{conv } A$ в произвольном нормированном пространстве, где $A = \{x_0, x_1, \dots, x_t\}$ — множество с аналогичным свойством, и 2) насколько большим может быть число t ? В этой заметке даются ответы на поставленные вопросы.

Пусть $\mathcal{R}_n$ — действительное нормированное пространство размерности n и $\mathcal{A}$ — семейство всех таких множеств $A = \{x_0, x_1, \dots, x_t\} \subset \mathcal{R}_n$, что $\|x_i - x_j\| = 1$ при $i \neq j$. Обозначим через $\text{card } A$ мощность множества A и положим

$$t(\mathcal{R}_n) = \max_{A \in \mathcal{A}} \text{card } A. \quad (1)$$

Теорема 1. Для любого нормированного пространства справедливо неравенство

$$t(\mathcal{R}_n) \leq 2^n,$$

причем равенство $t(\mathcal{R}_n) = 2^n$ достигается тогда и только тогда, когда единичный шар пространства $\mathcal{R}_n$ представляет собой параллелепипед.

Доказательству теоремы 1 предположим некоторые вспомогательные рассуждения.

Пусть K — выпуклый компакт пространства $\mathcal{R}_n$. Диаметр множества K называется числом

$$\text{diam } K = \max_{x, y \in K} \|x - y\|.$$

Лемма 1. Существуют такие экстремальные точки $a, b \in K$, что

$$\text{diam } K = \|a - b\|.$$

Лемма 2. Пусть $x_1, x_2 \in K$ — такие две точки, для которых $\text{diam } K = \|x_1 - x_2\|$.

Тогда в $\mathcal{R}_n$ существуют две опорные гиперплоскости множества K , проходящие соответственно через точки x_1, x_2 и параллельные между собой.

Эти леммы доказываются так же, как в работе (³) при доказательстве теоремы 1 для случая $n=2$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $A \in \mathcal{A}$ — множество, для которого $\text{card } A = t(\mathcal{R}_n)$. Из ограниченности множества A непосредственно следует, что $\text{card } A < \infty$. Следовательно, выпуклая оболочка $M = \text{conv } A$ множества A представляет собой выпуклый многогранник пространства $\mathcal{R}_n$. Для удобства будем полагать, что M содержит внутренние точки, так как в противном случае мы можем ограничиться его несущей плоскостью. Обозначим через V множество вершин многогранника M и покажем, что $V = A$. Ясно (⁴), что $V \subset A$. Установим обратное включение $A \subset V$.

Предположим, напротив, что существует точка $x \in A \setminus V$, т.е. точка $x \in A$, не являющаяся вершиной многогранника M . Рассмотрим грань ⁽¹⁾ F_x точки x в M . Тогда x является внутренней точкой множества F_x относительно $\text{aff } F_x$. Пусть y — какая-либо экстремальная точка множества F_x . Тогда ⁽¹⁾ y — экстремальная точка также и множества M , т.е. $y \in A$, откуда имеем $\|x - y\| = 1$. С другой стороны, очевидно, $\|x - y\| < \text{diam } F_x \leq \text{diam } M$. Но в силу леммы 1 и включения $V \subset A$ немедленно получаем $\text{diam } M = 1$, что приводит к противоречию. Итак, $V = A$.

Пусть теперь a и b — две различные вершины многогранника M . Так как $\|a - b\| = \text{diam } M$, то, в силу леммы 2, существуют две опорные гиперплоскости к M , проходящие соответственно через a , b и параллельные между собой. Отсюда, на основе работы ⁽²⁾, заключаем, что число вершин многогранника M не превосходит 2^n , т.е.

$$t(\mathcal{R}_n) = \text{card } A = \text{card } V \leq 2^n.$$

Наконец, покажем, что равенство $t(\mathcal{R}_n) = 2^n$ имеет место тогда и только тогда, когда единичный шар Σ пространства $\mathcal{R}_n$ представляет собой параллелепипед. Если Σ — параллелепипед и A — множество всех его вершин, то, очевидно, $A \in \mathcal{A}$ и $\text{card } A = 2^n$, т.е. $t(\mathcal{R}_n) \geq 2^n$. Откуда с учетом установленного неравенства $t(\mathcal{R}_n) \leq 2^n$ получаем

$$t(\mathcal{R}_n) = 2^n.$$

Обратно, пусть $t(\mathcal{R}_n) = 2^n$. В силу ⁽²⁾ множество $M = \text{conv } A$, где $A \in \mathcal{A}$ удовлетворяет равенству $\text{card } A = 2^n$, представляет собой параллелепипед. Будем считать, что центр параллелепипеда M находится в точке O . Рассмотрим шар Σ' минимального радиуса с центром O , содержащий M . Из того, что M — центрально-симметричный многогранник, немедленно получаем, что радиус шара Σ' равен $1/2$, а это приводит нас к равенству $\Sigma' = M$, завершающему доказательство теоремы 1.

Этим получен ответ на второй вопрос, поставленный в начале заметки. Некоторый ответ можно дать и на первый вопрос. Для этого удобно ввести следующие понятия.

Определение 1. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Множество $M = \text{conv } A$ назовем правильным симплексом Хаддингера пространства $\mathcal{R}_n$, а число его вершин, которое мы обозначим через $p(M)$, назовем весом симплекса M .

Заметим, что если A' — произвольное подмножество множества A , то $A' \in \mathcal{A}$ и $M' = \text{conv } A'$ также является правильным симплексом Хаддингера пространства $\mathcal{R}_n$.

Определение 2. Если $A \in \mathcal{A}$, а $A' \subset A$, то симплекс $M' = \text{conv } A'$ назовем подсимплексом симплекса $M = \text{conv } A$. Пустое множество и M будем называть тривиальными подсимплексами симплекса M .

Определение 3. Пусть M — такой правильный симплекс Хаддингера пространства $\mathcal{R}_n$, что $p(M) = t(\mathcal{R}_n)$. Число $p(M) - 1$ назовем размерностью Хаддингера пространства $\mathcal{R}_n$ и обозначим через $\text{Him } \mathcal{R}_n$.

Таким образом, для любого правильного симплекса Хаддингера M пространства $\mathcal{R}_n$ справедливо неравенство

$$p(M) \leq \text{Him } \mathcal{R}_n + 1.$$

Проблема 1. Пусть M' — некоторый подсимплекс симплекса $M = \text{conv } A$, $L = \text{aff } M'$ — его несущая плоскость, $\mathcal{R}_L$ — подпространство линейного пространства $\mathcal{R}_n$, полученное из L параллельным переносом, с единичным шаром $\Sigma_L = \Sigma \cap \mathcal{R}_L$. Верно ли неравенство

$$p(M') \leq \text{Him } \mathcal{R}_L + 1?$$

Заметим, что для евклидова пространства E_n это неравенство является очевидным.

Далее, пусть K — выпуклый компакт пространства $\mathcal{R}_n$, $b(K)$ — наименьшее натуральное число гомотетичных ему множеств с положительным коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, при помощи которых можно

покрыть компакт K . Хадвигер ⁽⁶⁾ предположил, что $b(K)$ удовлетворяет неравенству

$$b(K) \leq 2^n,$$

причем равенство $b(K) = 2^n$ характеризует параллелепипед.

Теорема 2. Для любого правильного симплекса Хадвигера $M \subset \mathcal{R}_n$ имеет место равенство

$$b(M) = p(M).$$

Доказательство следует из доказательства теоремы 1 с применением результатов работы ⁽⁵⁾.

Проблема 2. Для любого ли нормированного пространства $\mathcal{R}_n$ имеет место равенство

$$b(\Sigma) = \text{Him } \mathcal{R}_n + 1,$$

где Σ — единичный шар пространства $\mathcal{R}_n$?

Определение 4. Пусть M — правильный симплекс Хадвигера нормированного пространства $\mathcal{R}_n$, а N — некоторый аффинный образ его. Множество N назовем симплексом Хадвигера пространства $\mathcal{R}_n$.

Так как число $b(K)$ является аффинным инвариантом, то $b(M) = p(M)$ для любого симплекса Хадвигера M .

Проблема 3. Пусть T — такой многогранник линейного пространства $\mathbf{R}_n$ размерности n , что $b(T)$ равно числу его вершин $p(T)$. Существует ли такая норма пространства $\mathbf{R}_n$, что в этой норме T является симплексом Хадвигера?

Автор выражает признательность акад. А. Н. Колмогорову за внимание к работе, а проф. В. Г. Болтянскому — за полезное обсуждение при ее написании.

Научно-исследовательский институт
планирования
Кишинев

Поступило
15 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959. ² L. Danzer, B. Grünbaum, Math. Zs., 79, 95 (1962). ³ С. А. Райко. Прикладная математика и программирование. № 14, 1975. Кишинев, Изд-во АН МССР. ⁴ Р. Рокафеллар, Выпуклый анализ, М., «Мир», 1973. ⁵ П. С. Солтан, Изв. АН МССР, № 1 (1963). ⁶ H. Hadwiger, Ungelöste Probleme, № 20, Elem. der Math., v. 12, 121 (1957). ⁷ Энциклопедия элементарной математики, кн. 5, М., «Наука», 1966.