

Член-корреспондент АН СССР В. Е. СТЕПАНОВ,
В. М. ГРИГОРЬЕВ, И. М. КАЦ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ВЫБОРА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

1. В заметке ⁽¹⁾ изучалась асимптотика решения системы уравнений переноса излучения в спектральной линии поглощения слоя нерассеивающей магнетизированной среды *

$$\mu \frac{dy}{d\tau} = Ay - B, \quad \tau \geq 0, \quad (1)$$

или в покомпонентной записи

$$\begin{aligned} \mu y_1' &= ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 - aB, \\ \mu y_2' &= by_1 + ay_2 + ey_3 + fy_4 - bB, \\ \mu y_3' &= cy_1 - ey_2 + ay_3 + gy_4 - cB, \\ \mu y_4' &= dy_1 - fy_2 - gy_3 + ay_4 - dB \end{aligned} \quad (1')$$

с условием

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp(-\lambda\tau) y_i(\tau) = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

В ⁽¹⁾ были получены оценки, позволяющие для любого $\varepsilon > 0$ построить приближенное решение задачи (1), (2), отличающееся на достаточно большой оптической глубине τ от точного менее чем на ε . Эти оценки были применены для вычисления глубины возникновения магнитоактивных линий. Хотя обычная эффективная глубина образования линии $\tau \sim 1$, возникновение линии может быть связано с существенно большими глубинами и сильно зависит от выбранной модели атмосферы.

Эти выводы имеют самое непосредственное отношение к проблеме выбора граничных условий, в которой еще не установилось единых критериев. Дело в том, что при построении теоретических контуров линий с использованием неоднородных моделей магнитного поля решение задачи (1), (2), как правило, может быть получено лишь численным интегрированием, например, методом Рунге — Кутты. Для этого задача (1), (2) на полупрямой $\tau \geq 0$ заменяется задачей Коши на отрезке $0 \leq \tau \leq t$:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dy}{d\tau} &= Ay - B, \quad 0 \leq \tau < t, \\ y(t) &= y_t, \end{aligned} \quad (3)$$

где y_t — вектор Стокса, задаваемый в точке $\tau = t$. Проблема граничных условий заключается в выборе t и y_t таких, чтобы с нужной точностью решение задачи Коши (3), (4) совпадало с решением задачи (1), (2) при $\tau = 0$.

Беккерс в ⁽²⁾ предложил два варианта выбора y_t , но не указал способ выбора t . Он просто полагал, что надо выбрать t достаточно большим, и

* Везде далее, если не оговорено противное, мы сохраняем для системы (1), ее коэффициентов и решения те же предположения и обозначения, что и в ⁽¹⁾.

указал наугад $t=2$. Затем Штауде ⁽³⁾ провел расчеты с $t=4$, Виттман ⁽⁴⁾ с $t=5$, Рачковский ⁽⁵⁾ с $t=10$. Очевидно, что, как бы ни выбирать y_i , неточный выбор t приведет к погрешностям в определении $y(0)$. Вместе с тем ясно, что слишком большое t ведет к неоправданному увеличению количества арифметических операций при численном интегрировании задачи Коши. Проблема граничных условий рассматривалась в ⁽⁶⁾, где был предложен алгоритм вычисления t и y_i при некоторых ограничениях на модель атмосферы. Затем в ⁽⁷⁾ был построен алгоритм, позволяющий приближенно найти граничные условия без ограничения на модели, но и без оценки погрешности в получаемом y_i . Асимптотика решения задачи (1), (2), найденная в ⁽¹⁾, позволяет определить t и y_i с любой наперед заданной точностью при любой модели атмосферы. Для полного решения проблемы граничных условий надо еще знать, как погрешность, допущенная в определении y_i , скажется на величине выходящего излучения $y(0)$. Частично этот вопрос уже обсуждался в ⁽⁶⁾. Полное решение его дано в следующем пункте.

2. Пусть на некоторой оптической глубине $\tau=t$ нам известно точное решение $y_i(t)=y_{ti}$ задачи (1), (2), и наряду с ним в этой же точке известно приближенное решение $u_i(t)=u_{ti}$. Приближенным граничным данным u_{ti} отвечает приближенное решение $u_i(\tau)$ системы (1) на отрезке $0 \leq \tau < t$. Оценим на этом отрезке возмущения в полной интенсивности v_1 ($v_i=v_i(\tau)=y_i(\tau)-u_i(\tau)$) и в поляризации $p=(v_2^2+v_3^2+v_4^2)^{1/2}$ по заданным возмущениям $v_{ti}=y_{ti}-u_{ti}$ в граничной точке $\tau=t$. Имеем ($0 \leq \tau < t$)

$$\begin{aligned}\mu v_1' &= av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4, \\ \mu v_2' &= bv_1 + av_2 + ev_3 + fv_4, \\ \mu v_3' &= cv_1 - ev_2 + av_3 + gv_4, \\ \mu v_4' &= dv_1 - fv_2 - gv_3 + av_4;\end{aligned}\tag{5}$$

$$v_i(t) = v_{ti}, \quad i=1, 2, 3, 4.\tag{6}$$

Обозначим

$$E_s = \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_{\tau}^t a(\tau) dz\right), \quad F_s^2 = 1 - E_s^2;\tag{7}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^t 2aE_s^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) ds, \quad \alpha \leq F_i \leq 1,\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\beta &= b/a, \quad \gamma = c/a, \quad \delta = d/a, \quad a \geq 1; \\ p_i &= p(t), \quad P = \max_{\tau \leq s \leq t} |p(s)|, \quad V = \max_{\tau \leq s \leq t} |v_1(s)|.\end{aligned}\tag{9}$$

Умножим каждое i -е уравнение в (5) на v_i и затем сложим три последних уравнения. После интегрирования получим

$$v_1^2 = v_{t1}^2 E_t^2 - \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^t 2aE_s^2(\beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4) v_1 ds,\tag{10}$$

$$p^2 = p_t^2 E_t^2 - \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^t 2aE_s^2(\beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4) v_1 ds,$$

откуда

$$v_1^2 - p^2 = (v_{t1}^2 - p_t^2) E_t^2.\tag{11}$$

Применяя к каждому из интегралов в (10) неравенство Буняковского — Шварца и неравенство Коши, найдем оценки

$$\begin{aligned} V^2 &\leq \alpha F_i P V + v_{i1}^2 E_i^2, \\ P^2 &\leq \alpha F_i P V + p_i^2 E_i^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее могут представиться три случая:

а) Если $v_{i1} = p_i$, то из (11) следует $v_i = p$ и, так как $\alpha \leq F_i$, из (12) находим

$$V \leq v_{i1}, \quad P \leq p_i. \quad (13)$$

Это означает, что возмущения в полной интенсивности и поляризации, полученные полем излучения на глубине $\tau = t$, не возрастают по мере распространения излучения к границе среды $\tau = 0$. Этот случай можно назвать случаем абсолютно устойчивого переноса излучения.

б) Если $p_i < v_{i1}$, то $P \leq V$ и из (12) следует

$$V \leq v_{i1}, \quad P \leq v_{i1}, \quad (14)$$

однако при этом можно построить пример, показывающий, что $p(\tau) > p_i$ для некоторого $\tau < t$. Это означает, что, в то время как возмущения в полной интенсивности не возрастают, возмущения в поляризации могут возрасти от p_i до v_{i1} , но не более. Это перекачка возмущения из полной интенсивности в поляризацию. Случай б) можно назвать случаем переноса излучения, равномерно устойчивого по поляризации.

в) Если $v_{i1} < p_i$, то $V \leq P$ и

$$V \leq p_i, \quad P \leq p_i, \quad (15)$$

однако можно построить пример, показывающий, что $v_i(\tau) > v_{i1}$, т. е. что может происходить перекачка возмущения из поляризации в полную интенсивность. Этот третий случай противоположен предыдущему, и его можно назвать случаем переноса излучения, равномерно устойчивого по полной интенсивности.

Полученные результаты вместе с результатами нашей работы ⁽¹⁾ позволяют полностью решить проблему выбора граничных условий. Именно, пусть надо найти такие t и y_i , чтобы решения задач (1), (2) и (3), (4) отличались при $\tau = 0$ в полной интенсивности и в поляризации соответственно не более чем на ε_i и ε_p . В теории магнитоактивных линий и в экспериментах с ними известно, что поляризованная часть полной интенсивности обычно на порядок меньше полной интенсивности. Поэтому будем считать, что $\varepsilon_p < \varepsilon_i$. Далее, с помощью асимптотики, указанной в ⁽¹⁾, находим по данному ε_p глубину возникновения линии $t = \tau_i$ и y_i (y_{i1} — интенсивность континуума на оптической глубине t , $y_{i1} = 0$, $i = 2, 3, 4$). Тогда погрешность в поляризации на глубине t не превосходит ε_p . Это соответствует случаю переноса излучения, равномерно устойчивого по поляризации, и, так как $v_{i1} \leq \varepsilon_p$, решение задачи (3), (4) будет удовлетворять поставленным условиям.

Благодарим Б. Я. Мартузана и Б. С. Польского за неизменный интерес к работе и полезные обсуждения.

Сибирский институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
Сибирского отделения Академии наук СССР
Иркутск

Поступило
30 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Е. Степанов, В. М. Григорьев, И. М. Кац, ДАН, т. 222, № 5 (1975). ² J. M. Beckers, Solar Phys., v. 9, 372 (1969). ³ J. Staudé, ibid., v. 11, 111 (1970). ⁴ A. Wittmann, Dissertation, Göttingen, 1973. ⁵ Д. Н. Рачковский, Изв. Крымской астрофиз. обсерв., т. 40, 127 (1969). ⁶ J. M. Katz, Solar Phys., v. 24, 28 (1972). ⁷ И. М. Кац, Иссл. по геомагнетизму, аэронавигации и физике Солнца, в. 28, 67 (1973).