

А. Т. УСС, В. И. ШЕВЧЕНКО

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ДВУХ УРАВНЕНИЙ СО МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ  
ПЕРЕМЕННЫМИ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 I 1975)

В статье рассматривается краевая задача для эллиптических систем второго порядка, указанных в заголовке, с краевым условием ( $v$  — внутренняя нормаль)

$$\begin{aligned}u_1 &= f_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial v} &= f_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Пример эллиптической системы двух уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, для которой однородная задача Дирихле имеет бесконечно много линейно независимых решений, впервые был построен А. В. Бицадзе (<sup>1</sup>, <sup>2</sup>). Топологической основой этого примера является тот факт, что множество эллиптических систем указанного вида состоит из трех компонент связности и система А. В. Бицадзе является как раз гомотопическим представителем одной из компонент, не содержащей пары уравнений Лапласа. Непётеровость задачи Дирихле, однако, не означает, что для системы А. В. Бицадзе вообще нет пётеровых краевых задач. Примером такой задачи (для полуплоскости) может служить задача с краевым условием (1).

В случае многих независимых переменных примеры типа А. В. Бицадзе строились различными авторами (библиографию можно найти, например, в (<sup>3</sup>)). Множество эллиптических систем двух уравнений второго порядка с  $n > 2$  независимыми переменными связно (<sup>4</sup>). Для эллиптических систем такого вида как задача Дирихле (<sup>5</sup>), так и задача Неймана (<sup>6</sup>), являются пётеровыми и, как следствие, фредгольмовыми. Для пары уравнений Лапласа краевая задача (1) поставлена заведомо корректно. Кажется, по крайней мере на первый взгляд, что и для любой эллиптической системы из рассматриваемого множества задача (1) будет фредгольмовой. Ниже мы покажем (примером), что вообще говоря, это не так, и докажем фредгольмовость задачи (1) для более узкого класса ортогональных систем.

В полупространстве  $x_n > 0$ ,  $n > 2$ , рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}3 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_{n-1}^2} \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_n^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_{n-1}^2} \right) &= 0, \\ -2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_{n-1}^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_{n-1}^2} \right) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_n^2} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Система (2) эллиптична, так как ее характеристический определитель равен  $|\xi|^4$ . Однородная задача (1) с краевым условием при  $x_n = 0$  для си-

стемы (2) имеет бесконечно много линейно независимых решений

$$u_1(x) = x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

$$u_2(x) = \varphi(x) - x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

где  $\varphi(x)$  — любая функция, гармоничная в верхнем полупространстве и вместе с производной по  $x_n$  достаточно быстро убывающая на бесконечности. Проверка предоставляется читателю. Заметим, что ранг матрицы Я. Б. Лопатинского <sup>(7)</sup> для этой краевой задачи равен 1.

Задача (2), (4) переопределима и в любой конечной области. Чтобы добиться корректной постановки задачи (1), сузим класс эллиптических систем.

Пусть  $n$ -мерная область  $G$ ,  $n > 2$ , гомеоморфная шару, ограничена поверхностью Ляпунова  $S$ . Рассмотрим в  $G$  равномерно эллиптическую систему двух уравнений с достаточно гладкими вещественными коэффициентами (в матричной записи)

$$\sum_{j,k=1}^n A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A(x) u = 0, \quad (3)$$

где матрицы  $A_{jk}$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ , имеют вид

$$A_{jk}(x) = \begin{pmatrix} a_{jk}(x) & b_{jk}(x) \\ -b_{jk}(x) & a_{jk}(x) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Без ограничения общности можно считать, что характеристическая матрица системы (3)

$$\mathfrak{A}(x, \xi) = \sum_{j,k=1}^n A_{jk}(x) \xi_j \xi_k$$

на поверхности  $S$  имеет вид

$$\mathfrak{A}(y, \lambda \nu + \tau) = \lambda^2 E + B \lambda + C, \quad y \in S$$

( $E$  — единичная матрица второго порядка,  $\nu$  и  $\tau$  — соответственно внутренняя нормаль и единичный касательный вектор к поверхности  $S$  в точке  $y$ ).

Обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  корни уравнения  $\det \mathfrak{A}(y, \lambda \nu + \tau) = 0$ , лежащие в верхней  $\lambda$ -полуплоскости. Пусть компоненты  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  вектора  $u(x)$  удовлетворяют на  $S$  краевому условию (1). Покажем, что для задачи (3), (1) (в классической постановке) выполнено условие Я. Б. Лопатинского <sup>(7)</sup>, которое в данном случае <sup>(8)</sup> означает обратимость матрицы

$$\Phi(\tau) = \int_{\gamma} \mathfrak{B}(\lambda) \mathfrak{A}^{-1}(y, \lambda \nu + \tau) d\lambda, \quad \mathfrak{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

(контур  $\gamma$  охватывает корни  $\lambda_1, \lambda_2$  и только их).

С точностью до постоянного множителя

$$\det \Phi(\tau) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_1 - \bar{\lambda}_2|^2 (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1) (\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)} (\lambda_1 \lambda_2 + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 + \text{Sp } C), \quad (5)$$

где  $\text{Sp } C$  обозначает след матрицы  $C$ . В работе <sup>(6)</sup> показано, что последний множитель в формуле (5) отличен от нуля, так что  $\det \Phi(\tau) \neq 0$  и в классических пространствах краевая задача (3), (1) пётрера.

Множество эллиптических систем вида (3), (4) связано (<sup>4</sup>). Поэтому множество краевых задач (3), (1) связано и имеет один и тот же индекс. Но для пары уравнений Лапласа он равен нулю. Таким образом, краевая задача (3), (1) фредгольмова.

Институт математики  
Академии наук БССР  
Минск

Поступило  
10 I 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. В. Бицадзе, УМН, т. 3, в. 6, 211 (1948). <sup>2</sup> А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, 1959. <sup>3</sup> В. И. Шевченко, ДАН, т. 210, № 6, 1300 (1973). <sup>4</sup> В. И. Шевченко, Доп. АН УРСР, № 2, 138 (1970). <sup>5</sup> Б. В. Боярский, Бюлл. Польской АП, сер. матем., астр. и физ. наук, т. 8, № 1, 19 (1960). <sup>6</sup> В. И. Шевченко, Сб.: Матем. физика, № 5, 206. Киев, «Наукова думка», 1968. <sup>7</sup> Я. Б. Лопатинский, УМН, т. 5, № 2, 123 (1953). <sup>8</sup> В. И. Шевченко, ДАН, т. 221, № 5 (1975).