

Я. Л. ГЕРОНИМУС, А. К. МЕДВЕДЕВА

О СПРАВЕДЛИВОСТИ «ПРАВИЛА ЧЕБЫШЕВА» ДЛЯ ОДНОГО ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 V 1975)

Рассмотрим весовую функцию

$$p(x) = \frac{C}{\pi \sqrt{1-x^2}} \frac{1+\alpha^2-2\alpha x}{1+\beta^2-2\beta x}, \quad C = \frac{1-\beta^2}{1-2\alpha\beta+\beta^2}, \quad (1)$$

для которой $-1 < \alpha, \beta < 1$; она положительна на отрезке $[-1, +1]$ и ее среднее значение на нем равно $1/2$. Мы будем говорить, что для нее справедливо «правило Чебышева» с n узлами (короче: $p(x) \in T_n$), если обобщенная квадратурная формула Чебышева

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}), \quad P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k^{(n)}), \quad (2)$$

в которой все n узлов $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ вещественны и лежат на отрезке $[-1, +1]$, справедлива для любого многочлена $f(x)$ степени n .

В работе (1) найдены условия, при которых $p(x) \in T_n$, однако, лишь для того частного случая, когда $r=1$ или $r=1/2$, где

$$r = \frac{2(\beta - \alpha)(1 - \alpha\beta)}{\beta(1 - 2\alpha\beta - \alpha^2)}; \quad (3)$$

в настоящей работе рассмотрен более общий случай.

Заметим, что в самом общем случае при замене α, β на $-\alpha, -\beta$ величина r не изменится; если при этом замесить в (1) x на $-x$, то все сведется к изменению знаков у всех узлов.

2. В работе (1) показано, что для весовой функции (1) мы имеем

$$2^n P_n(y) = E \left\{ z^n \left(1 - \frac{\beta}{z} \right)^s \right\} = E \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(n)} z^{n-m} \right\}, \quad s = rn, \quad (4)$$

$$A_m^{(n)} = \binom{s}{m} (-\beta)^m, \quad z = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad |y + \sqrt{y^2 - 1}| > 1,$$

где $E\{\}$ означает целую часть выражения внутри скобок; при этом многочлен $P_n(\cos \varphi)$ таков:

$$2^{n-1} P_n(\cos \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} A_m^{(n)} e^{i(n-m)\varphi} \right\} + \frac{A_n^{(n)}}{2}; \quad (5)$$

для того чтобы все его корни были вещественными и лежали на отрезке $[0, \pi]$, достаточно, чтобы все корни многочлена

$$\sum_{m=0}^{n-1} A_m^{(n)} z^{n-m} + \frac{A_n^{(n)}}{2}$$

лежали в области $|z| < 1$; для этого, в свою очередь, достаточно известное условие С. Какейя

$$1 = A_0^{(n)} > A_1^{(n)} > A_2^{(n)} > \dots > A_{n-1}^{(n)} > \frac{A_n^{(n)}}{2} > 0. \quad (6)$$

Теорема. Для включения $p(x) \in T_n$ при обозначениях (1) – (5) имеем:

1) при заданных величинах α и $\beta = \alpha - \varepsilon$, удовлетворяющих неравенствам $0 < \alpha < \varepsilon < 1$, достаточно условие

$$n < \frac{\alpha}{2(1+\alpha\varepsilon)} + \frac{1}{2\varepsilon}; \quad (7)$$

2) при рациональном положительном $r = p/q < 1$ и при $\alpha, \beta < 1$ имеем $p(x) \in T_{qv}$, где v – произвольное число натурального ряда.

3. Рассмотрим сперва случай 1); полагая $\beta = \alpha - \varepsilon < 0$, мы имеем по (3) легко проверяемое неравенство

$$r = \frac{2\varepsilon(1+\alpha\varepsilon-\alpha^2)}{(\varepsilon-\alpha)(1+2\alpha\varepsilon-\alpha^2)} > 1;$$

так как в этом случае $s > n$ и $\beta < 0$, то

$$\left\{ A_m^{(n)} = \binom{s}{m} (-\beta)^m \right\} > 0$$

и неравенства (6) таковы:

$$\begin{aligned} 1 > s \cdot (-\beta) > \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} (-\beta)^2 > \dots > \frac{s(s-1) \dots (s-n+2)}{(n-1)!} (-\beta)^{n-1} > \\ > \frac{1}{2} \frac{s(s-1) \dots (s-n+1)}{n!} (-\beta)^n > 0; \end{aligned} \quad (8)$$

они справедливы при $-s\beta < 1$, т. е. при условии

$$n < -\frac{1}{\beta r} = \frac{1+2\alpha\varepsilon-\alpha^2}{2\varepsilon(1+\alpha\varepsilon-\alpha^2)} = \frac{1}{2\varepsilon} \left[1 - \frac{\alpha\varepsilon}{1+\alpha\varepsilon-\alpha^2} \right]; \quad (9)$$

это неравенство выполняется при более простом неравенстве (7) или при еще более простом неравенстве $n < 1/(2\varepsilon)$.

Таким образом, включение $p(x) \in T_n$ может иметь место при сколь угодно большом значении n , если только выбрать достаточно малое значение ε ; этого и следовало ожидать, ибо при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\alpha \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$; при этом предельном переходе весовая функция (1) переходит в весовую функцию Чебышева $p_0(x) = 1/\pi \sqrt{1-x^2}$.

4. Пусть теперь $r < 1$, т. е. $s < n$; положим $0 < r = p/q$, $p < q$, $n = qv$, как было сказано в условии теоремы; по (4) получим

$$2^n P_n(y) = E \left\{ z^n \left(1 - \frac{\beta}{z} \right)^{rn} \right\} = E \left\{ z^{qv} \left(1 - \frac{\beta}{z} \right)^{pv} \right\} = z^{(q-p)v} (z-\beta)^{pv}; \quad (10)$$

при $|\beta| < 1$ все корни этого многочлена лежат, очевидно, в области $|z| < 1$ и поэтому $p(x) \in T_{qv}$.

Нетрудно видеть, что, задавая любое число $0 < r < 1$, мы всегда можем найти соответствующие значения параметров α, β , удовлетворяющие условиям $-1 < \alpha, \beta < 1$.

Действительно, задавая произвольно $0 < \beta < 1$ и пользуясь (3), будем иметь такое уравнение для нахождения α :

$$(2-r)\beta\alpha^2 - 2\alpha[1+(1-r)\beta^2] + \beta(2-r) = 0; \quad (11)$$

условие вещественности его корней

$$\beta^2(1-r) - \beta(2-r) + 1 \geq 0,$$

как легко видеть, выполняется при условии $\beta \leq 1$.

Так как при $0 < \beta$ имеем для корней α_1 и α_2 уравнения (11) $\alpha_1\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, то, полагая $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$, имеем

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{1 + (1-r)\beta^2 - \sqrt{[1 + (1-r)\beta^2]^2 - [(2-r)\beta]^2}}{(2-r)\beta}. \quad (12)$$

5. Мы рассмотрели случай $r \geq 1$; при $r = 1$, полагая $\alpha > 0$, получим из (11)

$$\beta = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \leq 1,$$

т. е. в этом случае функция (1) является весовой функцией Аллмана (2).

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \frac{1-\beta x}{1-2\beta x+\beta^2}. \quad (13)$$

Так как в этом случае можно найти в явном виде все корни многочлена (5), то ограничение $-\beta s < 1$ становится излишним; нетрудно доказать в этом случае необходимость ограничения Аллмана $-1/2 < \beta < 1/2$, как это сделано, например, в (4).

Харьковский аэрокосмический институт

Поступило
22 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Я. Л. Герцфельд, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, № 5 (1969). ² J. L. Ullman, Bull. Am. Math. Soc. v. 72, № 6 (1966). ³ J. L. Ullman, Michigan Math. J., v. 13 (1966).