

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

А. И. ИБРАГИМОВ

О ПОВЕДЕНИИ НА ГРАНИЦЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 18 IV 1975)

Вопросы регулярности граничных точек для эллиптических и параболических уравнений относительно задачи Дирихле изучены в работах (1-4). В этой заметке аналогичные вопросы исследуются для вырождающихся уравнений.

Рассмотрим в ограниченной области $D \in R^n$ уравнение

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:

$$c_2 |\xi|_{n-1}^2 \geq \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_1 |\xi|_{n-1}^2, \quad |\xi|_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2; \quad (2)$$

$$|a_{in}(x)| \leq c_3 |x_n - y_n|^{1+\alpha}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \notin D, \quad (3)$$

причем $a_{nn}(x)$ всюду в D положительно;

$$|b_i(x)| \leq c_4, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

причем $-b_1 \leq b_n(x) \leq -b_2$, где $c_1, c_2, c_3, c_4, b_1, b_2$ — положительные константы. Коэффициенты уравнения (1) предполагаются равномерно удовлетворяющими условию Дини.

Введем следующие обозначения:

$\Pi_{\bar{x}^0; R}^{x_n^1; x_n^2}$ — цилиндр, определяемый неравенствами $|x - x^0|_{n-1} \leq R$, где $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$, а $x_n^1 \leq x_n \leq x_n^2$;

$S_{\bar{x}^0; R}^{x_n^1; x_n^2}$ — боковая поверхность цилиндра $\Pi_{\bar{x}^0; R}^{x_n^1; x_n^2}$.

$Q_{\bar{x}^0; R}^{x_n^1}$ и $Q_{\bar{x}^0; R}^{x_n^2}$ — соответственно нижнее и верхнее основания цилиндра $\Pi_{\bar{x}^0; R}^{x_n^1; x_n^2}$.

Ось x_n предполагается фиксированной и направленной вверх.

Назовем верхней крышкой области D совокупность таких точек $x \in D$, для каждой из которых найдется такое $h > 0$, что цилиндр $\Pi_{\bar{x}; h}^{x; x+h}$ принадлежит области D , а цилиндр $\Pi_{\bar{x}; h}^{x; x-h}$ не принадлежит D ; здесь как и раньше $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Пусть верхняя крышка области D обозначена через $\gamma(D)$, тогда множество $\Gamma_{x_n}(D) = \partial D \setminus \gamma(D)$ называется собственной границей области D относительно переменной x_n .

Определим задачу Дирихле для уравнения (1) так же, как и в случае чисто параболического уравнения (2, 3). Дадим следующие определения.

Определение 1. Пусть в области D дана задача Дирихле для уравнения (1). Точка $x^0 \in \partial D$ называется регулярной, если обобщенное по Винеру решение задачи непрерывно в этой точке.

Определение 2. Точка $x^0 \in \partial D$ называется (c_1, c_2) -регулярной, если для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой области $D' \in D$, целиком лежащей в полупространстве $x_n < x_n^0$, любого оператора $L'(u)$ с константами $c_1' \leq c_1, c_2' \geq c_2$ и любого решения $u'(x)$ уравнения $L'(u) = 0$, не превосходящего единицы в пересечении D' с ε_1 -окрестностью x^0 , в пересечении D' с δ -окрестностью точки x^0 (если оно не пусто), выполняется неравенство $u'(x) \leq \varepsilon_2$.

Определение 3. Пусть E — B -множество в R^n . Назовем меру μ допустимой, если

$$\int_E G(x-y) d\mu(y) \leq 1, \quad x \notin E, \quad (5)$$

где

$$G(x-y) = \begin{cases} (x_n - y_n)^{-(n-1)/2} \exp\left(-\frac{|x-y|_{n-1}^2}{4x_n}\right), & x_n > y_n, \\ 0, & x_n \leq y_n. \end{cases}$$

Теперь аналогично ^(2, 3) введем понятие потенциала и емкости.

Определение 4. Величину $p(E) = \sup \mu(E)$ назовем емкостью множества E относительно оси x_n , где верхняя грань берется по всем допустимым мерам $\mu(E)$.

Определение 5. Пусть множество E в определении 3 лежит целиком в полупространстве $x_n < x_n^0$; тогда величину

$$\gamma(E; x^0) = \sup_E \int G(x^0 - y) d\mu(E)$$

назовем потенциалом множества E в точке x^0 относительно оси x_n , где верхняя грань берется по всем допустимым мерам.

Рассмотрим три цилиндра

$$C_1 = C_{0;R}^{0;vR^2}, \quad C_2 = C_{0;aR}^{2/3vR^2;vR^2}, \quad C_3 = C_{0;aR}^{0;1/2vR^2},$$

где $0 < a < 1, 0 < v < 1$, а $R > 0$.

Пусть область D расположена внутри цилиндра C_1 , который пересекает цилиндр C_2 и имеет предельные точки на собственной, относительно оси x_n , границе C_3 .

Пусть Γ — та часть собственной границы области D , которая лежит строго внутри C_3 .

Пусть в D дано уравнение (1) с условиями (2) — (4).

Лемма 1. Для положительного в D , непрерывного в $\bar{D}$ решения уравнения (1), обращающегося в нуль на Γ ,

$$\sup_{\bar{D}} u \geq (1 + \tau_0 R^{-(n-1)} p(E)) \sup_{D \cap C_2} u,$$

где $\tau_0 > 0$ — константа, зависящая только от константы неравенств (2) — (4), коэффициентов уравнения и размерности пространства n , $p(E)$ — емкость множества $E = C_3 \setminus D$.

Определим две последовательности чисел $\{\rho_m\}, \{\tau_m\}$. Последовательность ρ_m определим рекуррентно:

$$\rho_0 = 1/2, \quad \rho_{m+1} = \rho_m / \sqrt{\ln \rho_m}.$$

Числа τ_m определим через ρ_m из условия

$$4n\tau_m |\ln \tau_m| = \rho_m^2.$$

Пусть точка x^0 принадлежит границе области D . Обозначим через H дополнение к области D и пусть H_m — пересечение H с полосой $x_n - \tau_m \leq x_n \leq x_n^0 + \tau_m$.

Вновь введем в рассмотрение следующую тройку цилиндров (предположим, что x^0 лежит в начале координат):

$$C_m^0 = C_{0; \rho_m - \tau_m}^{-\tau_m; 0}, \quad C_m^1 = C_{0; \rho_m}^{-\tau_m; -\tau_{m+1}}, \quad C_m^2 = C_{0; \rho_m + \tau_m}^{-\tau_{m+1}; 0}.$$

Пусть D^0 — область, содержащаяся в D , пересекающая боковую поверхность или основание цилиндра C_m . Пусть

$$D_m^0 = D \cap H_m, \quad D_m^2 = D^0 \cap C_m^2, \quad H_m^1 = H_m \cap C_m^1.$$

Пусть в D дано уравнение (1) с условиями (2) — (4).

Лемма 2. Для положительного в D , непрерывного в $\bar{D}$ решения уравнения (1), обращающегося в нуль на той части Γ_m^0 границы D_m^0 , которая расположена строго внутри C_m ,

$$\sup_{x \in L_m^1} u(x) > (1 + \eta \cdot \gamma_m) \sup_{x \in L_m^2} u,$$

где $m > m_0$, $\eta > 0$ зависит только от констант неравенств (2) — (4), коэффициентов уравнения и размерности пространства R^n . γ_m — потенциал лн-жества H_m^1 в точке x^0 относительно оси x_n .

Леммы 1 и 2 доказываются с помощью барьеров, построенных в работе (5).

Из лемм 1 и 2 вытекают следующие теоремы.

Теорема 1. Для регулярности в смысле определения 2 граничной области D достаточна расходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} 8^{mn} p(E_m), \quad E_m = C_{\bar{x}; \alpha 8^{-m}}^{x_n^0 - \sqrt{8^{-2m}}; x_n^0 - 8^{-2m}} \setminus D.$$

Теорема 2. Для регулярности в смысле определения 1 граничной точки x^0 области D необходима и достаточна расходимость ряда $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$, где $\gamma_m = \gamma(H_m; x^0)$.

Пусть существует $\Omega(\rho)$, стремящаяся к 0 при $\rho = \sqrt{|x_n - x_n^0| + |x - x^0|^2}$, обладающая свойством ε_2 в определении 2. Тогда справедлива следующая

Теорема 3. Если ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ расходится, то в качестве $\Omega(\rho)$ можно взять $\exp[-N_1 S(\ln \ln \frac{1}{\rho})]$, где

$$S(t) = \sum_{m=1}^{[t]} \gamma_m,$$

а N_1 — константа, зависящая только от n .

Теперь рассмотрим квазилинейное уравнение

$$L_2(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} x_j + b(x; u; \nabla u) = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям таким же, как и для уравнения (1). Предположим, что

$$b(x, p, q) \leq \mu(p) |q|^2 - c_3, \quad \int_0^{\infty} \mu(p) dp < \infty,$$

c_3 — положительная константа.

Пусть $b(x, p, q)$ удовлетворяет равномерному условию Дини, тогда для уравнения $L_2(u)=0$ остаются справедливыми теоремы 1—3. Отметим, что из теорем 1 и 2 следует, что условие регулярности граничной точки для эллиптического уравнения, имеющего на границе области сильное вырождение в параболическое, совпадает с условием регулярности для уравнения теплопроводности.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Новрузову, а также Ш. А. Алимову, В. И. Ильину, Е. М. Ландису за полезное обсуждение данной работы.

Азербайджанский институт нефти и химии
им. М. Азизбекова
Баку

Поступило
7 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. В. Келдыш, ДАН, т. 77, № 2, 161 (1957). ² Е. М. Ландис, ДАН, т. 185, № 3 (1969). ³ Е. М. Ландис, Уравнение второго порядка эллиптического и параболического типов, «Наука», 1971. ⁴ А. А. Новрузов, Некоторые вопросы качественной теории уравнений 2-го порядка с неотрицательной характеристической формой, Докт. дисс., Баку, 1973. ⁵ А. И. Ибрагимов, Уч. зап. Азерб. ин-та нефти и химии им. М. Азизбекова, № 7 (1974).