

В. И. ИВАНОВ

ЛОКАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 8 V 1975)

Задача локального приближения функций восходит к П. Л. Чебышеву⁽¹⁾. Локальное приближение функций линейными полиномиальными методами изучалось Бохнером⁽²⁾, Фреем^(3, 4), Г. И. Натансоном⁽⁵⁾, В. Я. Янчаком⁽⁶⁾, В. Поповым⁽⁷⁾ и др. В этих работах величина окрестности точки, в которой функция обладает гладкостью, была либо фиксированной, либо заданной функцией от порядка приближающего полинома.

С. Б. Стечкин поставил следующую задачу: исследовать, как величина окрестности точки, в которой функция обладает некоторой гладкостью, влияет на скорость ее приближения линейными методами в этой точке. Одна из точных постановок этой задачи такова. Пусть

$$k \in \mathbb{N}; \quad x \in \mathbb{R}; \quad \alpha, C, M \in \mathbb{R}_+; \quad 0 < h \leq \pi.$$

Будем говорить, что 2π -периодическая измеримая функция принадлежит классу $H(\alpha, h, M, C, k)$, если выполнены условия:

- 1) $|f(x)| \leq M \quad \forall x,$
- 2) $|\Delta_\eta^k f(0)| \leq C |\eta|^\alpha, \quad |\eta| \leq h.$

Рассмотрим линейные методы приближения вида

$$u_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i f(x+it) \right\} K_n(t) dt, \quad (1)$$

где

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt,$$

так что $u_n(x, f)$ — тригонометрический полином порядка n . Требуется исследовать поведение величины

$$E_n(h, \alpha) = \inf_{u_n} \sup_{f \in H} |f(0) - u_n(0, f)|. \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

как функции от параметров n, h, α при фиксированных C, M и k .

Имеет место следующая

Теорема 1. Если $k \in \mathbb{N}; C, M \in \mathbb{R}_+; 0 < \alpha \leq \tau; 0 < h \leq \pi$, то для $E_n(h, \alpha)$ при $n \geq 2$ справедлива оценка

$$E_n(h, \alpha) = O \left(\sqrt[n]{nh+1} e^{-\tau h} - \left(\frac{\ln n}{\ln(nh \ln n + 2)} \right)^{\alpha/2} n^{-\alpha} \right), \quad (3)$$

причем константа в O зависит только от τ, M, C, k .

Для $k=1$ и $n \rightarrow \infty$ справедливы следующие порядковые соотношения:

$$1) \quad E_n(h, \alpha) \asymp \sqrt[n]{nh+1} e^{-nh}, \quad 0 < h \leq \alpha \frac{\ln n}{n} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\ln \ln n}{n};$$

$$2) \quad E_n(h, \alpha) \asymp n^{-\varepsilon}, \quad n^{-(1-\varepsilon)} \leq h \leq \pi, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Вопрос о точности оценки (3) для остальных h остается открытым. Следствие. В условиях теоремы 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(h, \alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} nh = \infty$.

В. Я. Янчак ⁽⁶⁾ исследовал приближение линейными методами функций с переменной гладкостью. В связи с этой задачей введем следующий класс функций. Пусть

$$k \in \mathbb{N}; \quad x \in \mathbb{R}; \quad M, C \in \mathbb{R}_+; \quad 0 < h \leq \pi; \quad \alpha(x+2\pi) = \alpha(x) > 0.$$

Будем говорить, что 2π -периодическая, измеримая функция $f(x)$ принадлежит классу $H(\alpha(x), h, M, C, k)$, если для всех x выполнены условия:

- 1) $|f(x)| \leq M$;
- 2) $|\Delta_t^k f(x)| \leq C |t|^{\alpha(x)}, \quad |t| \leq h$.

Теорема 2. Если $k \in \mathbb{N}; M, C \in \mathbb{R}_+; 0 < \alpha(x) \leq \tau$, то для каждого $0 < h \leq \pi$ существует линейный оператор вида (1), зависящий от h, M, C, k, τ , такой, что для любой функции $f(x) \in H(\alpha(x), h, M, C, k)$ и для всех x при $n \geq 2$ справедлива оценка

$$|f(x) - K_n(x, f)| = O \left(\sqrt{nh+1} e^{-nh} + \left(\frac{\ln n}{\ln(nh/\ln n+2)} \right)^{\alpha(x)/2} n^{-\alpha(x)} \right),$$

причем константа в O зависит только от τ, M, C, k .

Из этой теоремы вытекает, что результат В. Я. Янчака ⁽⁶⁾ справедлив при $h \geq n^{-1/(1+\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < 1$.

При доказательстве теорем 1 и 2 используется решение следующей экстремальной задачи для тригонометрических полиномов: выяснить равномерное поведение τ_{n-1} при $0 < a \leq \pi$, поведение функции

$$\sup_{\tau_{n-1} \in L[-a, a]} \|\tau_{n-1}\|_{L[-\pi, \pi]},$$

где верхняя грань берется по всем четным тригонометрическим полиномам порядка $n-1$. Для фиксированного a порядок этой верхней грани при $n \rightarrow \infty$ найден в работе Н. И. Черных ⁽⁸⁾. Сформулируем полученный нами результат.

Лемма. Если $0 < a \leq \pi$ и $n \geq 1$, то

$$\sup_{\tau_{n-1} \in L[-a, a]} \|\tau_{n-1}\|_{L[-\pi, \pi]} \asymp \frac{\operatorname{ctg}^{2n-1/2} a}{\sqrt{n(\pi-a)+1}},$$

причем константы в неравенствах абсолютные.

Для доказательства этой леммы устанавливается, что при $\eta \geq 1$ и $n \geq 1$ с абсолютными константами

$$\sup_{P_{n-1} \in L[-1, 1]} \|P_{n-1}\|_{C[-\eta, \eta]} \asymp \frac{n^2 g^n(\eta)}{n^2(\eta-1)+1},$$

где P_{n-1} — алгебраические многочлены степени $n-1$, $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

В заключение автор выражает благодарность С. Б. Стечкину за руководство работой.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Л. Чебышев. Сочинения, т. 2, 1947, стр. 41.
- ² S. Bochner, Ann. Math. Stud., v. 25, 3 (1950).
- ³ T. Frey, Magyar Tud. Acad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., t. 7, № 3-4, 403 (1957).
- ⁴ T. Frey, Magyar Tud. Acad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., t. 8, № 1, 89 (1958).
- ⁵ Г. И. Натансон, Вестн. ЛГУ, № 19, 20 (1966).
- ⁶ В. Я. Янчак, Матем. заметки, т. 8, № 4, 443 (1970).
- ⁷ В. Попов, Матем. заметки, т. 17, № 3, 369 (1975).
- ⁸ Н. И. Черных, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 78, 48 (1965).