

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

И. Н. КАТЕРИНОЧКИНА

**ПОИСК МАКСИМАЛЬНОГО ВЕРХНЕГО НУЛЯ МОНОТОННОЙ
ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ**

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 6 V 1975)

Задача поиска максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики родственна задаче оптимальной расшифровки монотонной функции. Задача оптимальной расшифровки была решена в шенноновской постановке В. К. Коробковым ⁽¹⁾ и Ж. Анселем ⁽²⁾. Оказалось, что задача поиска максимального верхнего нуля в аналогичной постановке несколько проще и функция Шеннона для нее имеет другой вид. Поскольку к этой задаче сводится большое число различных экстремальных задач, представляется важным вычисление для нее точного значения функции Шеннона и построение соответствующего алгоритма.

Ниже приводятся некоторые определения и формулировка задачи. Все неопределяемые понятия можно найти в работе ⁽¹⁾.

Рассмотрим класс M_n монотонных функций алгебры логики от n переменных. Двоичный набор α длины n называется верхним нулем функции $f \in M_n$, если $f(\alpha) = 0$ и для любого набора β длины n такого, что $\alpha < \beta$, $f(\beta) = 1$. Число единиц двоичного набора α будем называть его уровнем и обозначать через $u(\alpha)$. Верхний нуль α функции f назовем ее максимальным верхним нулем, если для любого верхнего нуля β функции f $u(\beta) \leq u(\alpha)$.

Пусть функция $f \in M_n$ задана при помощи некоторого оператора A_f , который по любому двоичному набору α длины n вычисляет значение $f(\alpha)$. Рассмотрим задачу нахождения максимального верхнего нуля (хотя бы одного, если их несколько) произвольной функции $f \in M_n$ при помощи некоторого числа обращений к оператору A_f .

Пусть $\mathfrak{B} = \{B\}$ — множество всех алгоритмов, решающих эту задачу. Обозначим через $\mu(B, f)$ число обращений к оператору A_f , достаточное для нахождения максимального верхнего нуля функции f при помощи алгоритма B . Введем функцию Шеннона:

$$\mu(n) = \min_{B \in \mathfrak{B}} \max_{f \in M_n} \mu(B, f).$$

Основным результатом данной работы является
Теорема 1.

$$\mu(n) = C_n^{\lceil n/2 \rceil} + 1.$$

Доказательство. Нижняя оценка $C_n^{\lceil n/2 \rceil} + 1$ для $\mu(n)$ легко получается из рассмотрения следующей функции из класса M_n :

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } u(\alpha) \geq \lceil n/2 \rceil, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для получения верхней оценки функции $\mu(n)$ рассмотрим следующий алгоритм нахождения максимального верхнего нуля произвольной функции $f \in M_n$. Алгоритм состоит из двух этапов.

1-й этап. На первом шаге алгоритма вычисляем значение f на произвольном наборе α^1 уровня $\lceil n/2 \rceil$. Пусть на i -м шаге вычислено значение f

на некотором наборе α^i уровня $[n/2]-i+1$, $1 \leq i \leq [n/2]$. Если $f(\alpha^i)=1$, то на $(i-1)$ -м шаге вычисляем значение f на произвольном наборе α^{i+1} уровня $[n/2]-i$. Если же $f(\alpha^i)=0$, то переходим ко второму этапу алгоритма. Если на $([n/2]+1)$ -м шаге получено $f(\alpha^{[n/2]+1})=1$, то $f=1$ и алгоритм заканчивает работу.

2-й этап. Пусть к началу второго этапа алгоритма сделано $\tau+1$ шагов ($0 \leq \tau \leq [n/2]$), т. е. вычислены значения $f(\alpha^1)=f(\alpha^2)=\dots=f(\alpha^\tau)=1$ и $f(\alpha^{\tau+1})=0$, где $\alpha^1, \dots, \alpha^{\tau+1}$ — некоторые наборы уровней $[n/2], \dots, [n/2]-\tau$ соответственно. Тогда на $(\tau+2)$ -м шаге вычисляем значение f на произвольном наборе $\alpha^{\tau+2}$ уровня $[n/2]-\tau+1$, на котором значение f еще не определено. Пусть на i -м шаге ($i \geq \tau+2$) вычислено значение f на некотором наборе α^i уровня $j \geq [n/2]-\tau+1$. Если $f(\alpha^i)=1$, то на $(i+1)$ -м шаге вычисляем значение f на произвольном наборе α^{i+1} того же уровня j и таком, что $f(\alpha^{i-1})$ еще не определено по монотонности или непосредственно в результате предыдущих шагов алгоритма. Если такого набора не существует, то алгоритм заканчивает работу. Если же $f(\alpha^i)=0$, то на $(i+1)$ -м шаге вычисляем значение f на произвольном наборе α^{i+1} уровня $j+1$ таким, что значение $f(\alpha^{i+1})$ еще не определено непосредственно или по монотонности. Если такого набора не существует, то алгоритм останавливается. Пусть алгоритм сделал r шагов до остановки. Получаем цепочку наборов $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^r$, на которых последовательно вычислялось значение f . Тогда максимальный верхний нуль функции f — это набор α^s из этой цепочки с максимальным номером s такой, что $f(\alpha^s)=0$. Действительно, из описания алгоритма следует, что на всех наборах уровня $u(\alpha^s)+1$ функция f определена по монотонности или непосредственно и равна единице.

Обозначим описанный алгоритм через B_1 . Оценим сверху

$$\max_{f \in M_n} \mu(B_1, f).$$

При $n=1, 2$ верхняя оценка $C_{n-1}^{[n/2]+1}+1$ очевидна. Все дальнейшее доказыва-
ется для $n \geq 3$.

Лемма. Пусть P_i — произвольное множество двоичных наборов длины n уровня i , $0 \leq i \leq [n/2]-1$, и N_{i+1} — множество всех наборов уровня $i+1$, сравнимых с наборами множества P_i . Тогда

$$|N_{i+1}| - |P_i| \geq 2, \quad (1)$$

где $|N|$ — число элементов множества N .

Доказательство. При $n=3$ лемма очевидна. Докажем ее для $n \geq 4$. Из (3) следует, что

$$|N_{i+1}| \geq \frac{n-i}{i+1} |P_i|.$$

Отсюда получаем, что

$$|N_{i+1}| - |P_i| \geq \frac{n-2i-1}{i+1} |P_i| \geq \frac{2}{n} |P_i|.$$

Следовательно, при $|P_i| \geq n$ соотношение (1) выполняется. Докажем его для случая $|P_i| \leq n-1$. Обозначим $|P_i|$ через l . Пусть $l \leq n-i$. Один набор уровня i имеет ровно $n-i$ сравнимых с ним наборов уровня $i+1$. Для любых двух наборов α^1 и α^2 уровня i существует самое большее один набор β уровня $i+1$ такой, что $\alpha^1 < \beta$, $\alpha^2 < \beta$. Таким образом, для $l \leq n-i$ будет

$$|N_{i+1}| \geq (n-i) + (n-i-1) + \dots + (n-i-l+1) = \frac{1}{2}(2n-2i-l+1)l.$$

Для случая $n-i+1 \leq l \leq n-1$ используем ту же оценку, что и для $l=n-i$:

$$|N_{i+1}| \geq \frac{1}{2}(n-i+1)(n-i).$$

При помощи указанных оценок для $|N_{i+1}|$ легко оценить разность $|N_{i+1}| - |P_i|$ и получить утверждение леммы.

Пусть для произвольной функции $f \in M_n$ алгоритм B_1 сделал r шагов и закончил работу. Покажем, что $r \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. В процессе работы алгоритма образовалось множество $P' = \{\alpha^1, \dots, \alpha^r\}$ наборов, на которых последовательно вычислялось значение f . Пусть 1-й этап работы алгоритма состоял из $\tau + 1$ шагов ($0 \leq \tau \leq \lfloor n/2 \rfloor$) и пусть α^r — набор уровня σ ($n \geq \sigma \geq \lfloor n/2 \rfloor - \tau + 1$). Рассмотрим множество $P = P' \setminus \{\alpha^1, \dots, \alpha^{r-1}, \alpha^{r+1}\}$. Обозначим через P_i , $\lfloor n/2 \rfloor - \tau + 1 \leq i < \sigma$, подмножество множества P , состоящее из наборов P уровня i , на которых функция f равна единице. Через P_σ обозначим подмножество множества P , состоящее из всех наборов P уровня σ . Тогда число r шагов алгоритма B_1 выражается следующим образом:

$$r = |P'| = \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor - \tau + 1}^{\sigma} |P_i| + \sigma + 2\tau - \lfloor n/2 \rfloor - 1.$$

Из описания алгоритма B_1 следует, что множество

$$\bigcup_{i=\lfloor n/2 \rfloor - \tau + 1}^{\sigma} P_i$$

состоит из попарно несравнимых наборов.

Пусть $\tau \geq 2$, $\sigma > \lfloor n/2 \rfloor$. Рассмотрим множество $N_{\lfloor n/2 \rfloor}$ всех наборов уровня $\lfloor n/2 \rfloor$, сравнимых с наборами множества $\bigcup_{i=\lfloor n/2 \rfloor - \tau + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} P_i$. Обозначим множество $N_{\lfloor n/2 \rfloor} \cup P_{\lfloor n/2 \rfloor}$ через $\bar{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}$. Используя лемму, легко показать, что

$$|\bar{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}| \geq \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor - \tau + 1}^{\lfloor n/2 \rfloor} |P_i| + 2\tau - 2.$$

При n четном рассмотрим множество $L_{n/2}$ всех наборов уровня $n/2$, сравнимых с наборами множества $\bigcup_{i=n/2-1}^{\sigma} P_i$. Следуя (1), легко показать, что

$$|L_{n/2}| \geq \sum_{i=n/2-1}^{\sigma} |P_i| + \sigma - n/2.$$

Отсюда получаем, что $r \leq |\bar{P}_{n/2}| + |L_{n/2}| + 1 \leq C_n^{n/2} + 1$, так как $\bar{P}_{n/2} \cap L_{n/2} = \emptyset$.

При n нечетном рассматриваем множество $L_{(n+1)/2}$ всех наборов уровня $(n+1)/2$, сравнимых с наборами множества $\bigcup_{i=(n+1)/2+1}^{\sigma} P_i$. Пусть

$$\bar{P}_{(n+1)/2} = P_{(n+1)/2} \cup L_{(n+1)/2}.$$

Имеем

$$|\bar{P}_{(n+1)/2}| \geq \sum_{i=(n+1)/2}^{\sigma} |P_i| + \sigma - \lfloor n/2 \rfloor - 1.$$

Так как множество $\bar{P}_{\lfloor n/2 \rfloor} \cup \bar{P}_{(n+1)/2}$ состоит из попарно несравнимых наборов, то из (3) следует, что

$$|\bar{P}_{\lfloor n/2 \rfloor} \cup \bar{P}_{(n+1)/2}| \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} - 1.$$

Отсюда получаем, что

$$r \leq |\bar{P}_{(n+1)/2}| + |\bar{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}| + 2 \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} + 1.$$

Случай $\tau \geq 2$, $\sigma > \lfloor n/2 \rfloor$ разобран. Остальные случаи исследуются аналогично. Таким образом, для произвольной функции $f \in M_n$ $\mu(B_1, f) \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$. Следовательно, $\mu(n) \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$, откуда учитывая нижнюю оценку для $\mu(n)$ получаем утверждение теоремы 1.

Алгоритм В., построенный для вычисления функции $\mu(n)$, может быть применен для поиска максимальных верхних нулей конкретных монотонных функций алгебры логики.

Определим теперь подкласс M_n^k класса M_n , $k \leq n-1$. Функция f из M_n принадлежит подклассу M_n^k тогда и только тогда, когда для любого двоичного набора α длины n такого, что $u(\alpha) \geq k+1$, $f(\alpha) = 1$. Для подкласса M_n^k можно рассматривать функцию Шеннона $\mu(n, k)$, имеющую тот же смысл, что и $\mu(n)$ для класса M_n . Справедлива следующая

Теорема 2. При $k \geq [n/2]$

$$\mu(n, k) = C_n^{[n/2]} + 1;$$

при $k < [n/2]$

$$\mu(n, k) = C_n^k + 1.$$

В заключение автор выражает благодарность Ю. И. Журавлеву, под руководством которого была выполнена эта работа.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
5 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. К. Коробков. Проблемы кибернетики (сб. статей), в. 13, М., «Наука», 1965, стр. 5. ² G. Hansel, C. R., v. 262, № 20, 1088 (1966); Ж. Ансель, Кибернетич. сб., нов. сер., в. 5, М., «Мир», 1968, стр. 53. ³ В. М. Михеев, Проблемы кибернетики (сб. статей), в. 2, М., Физматгиз, 1959, стр. 69.