

УДК 517.946.9

МАТЕМАТИКА

А. С. ЛЕОНОВ

О ПОСТРОЕНИИ УСТОЙЧИВЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 V 1975)

1. Разработка методов решения различных нелинейных задач приобретает в настоящее время особую актуальность. Это относится, в частности, к часто встречающимся в приложениях краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Решение этих задач, как правило, невозможно без использования быстродействующих ЭВМ. В свою очередь, процесс решения их на ЭВМ требует аппроксимации исходной задачи некоторой конечно-разностной задачей, т. е. построения разностной схемы. Такая разностная схема должна удовлетворять ряду требований ⁽¹⁾, среди которых существенную роль играет устойчивость. В последние годы достигнуты значительные успехи в теории устойчивых разностных схем ^(1, 2), тем не менее вопрос об их построении для нелинейных задач исследован пока фрагментарно ^(3, 4). В настоящей работе предлагается общий подход к этой проблеме, заключающийся в следующем. Возможную неустойчивость данной схемы, делающую соответствующую конечно-разностную задачу некорректной, предлагается преодолевать путем применения регуляризующих алгоритмов ⁽⁵⁾, а именно метода регуляризации А. Н. Тихонова ⁽⁶⁾. Из получаемого при этом семейства разностных схем, зависящих от параметра регуляризации α , выбирается устойчивая с помощью выбора α по методу обобщенной невязки ⁽⁷⁾.

2. Пусть задана нелинейная краевая задача:

$$\begin{aligned} L_1 u &= \mathfrak{F}_1(x, u, \mathcal{D}u, \mathcal{L}u) = f_1(x), \quad x \in \Pi_n, \\ L_2 u &= \mathfrak{F}_2(x, u, \mathcal{L}u) = f_2(x), \quad x \in \partial\Pi_n; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \Pi_n = \{x: a_i < x_i < b_i; i=1, 2, \dots, n\}, \\ u(x) &\in U = W_2^l(\Pi_n), \quad n < 2l, \end{aligned}$$

а операторы L_1 и L_2 , определяемые функциями $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, осуществляют непрерывное отображение из U в банаховы пространства $B_1(\Pi_n)$ и $B_2(\partial\Pi_n)$ соответственно. Будем полагать, что правые части $f_1 \in B_1$ и $f_2 \in B_2$. Введем новое банахово пространство $F = B_1 \times B_2$ с элементами $f = (f_1, f_2)$ и нормой $\|f\|_F^2 = \|f_1\|_{B_1}^2 + \|f_2\|_{B_2}^2$, а также оператор $L = (L_1, L_2)$, действующий из U в F . Это отображение непрерывно. Тогда задача (1) примет вид

$$Lu = f, \quad u \in U, \quad f \in F. \quad (2)$$

Предположим, что правой части уравнения (2) $f \in F$ соответствует единственное его классическое решение $\bar{u}$. Пусть, далее, заданы конечномерные евклидовы пространства U_N и F_N с элементами u_N и f_N , а также операторы, осуществляющие связь пар пространств:

$$P_N: U \rightarrow U_N, \quad Q_N: F \rightarrow F_N, \quad \bar{P}_N: U_N \rightarrow U, \quad \bar{Q}_N: F_N \rightarrow F$$

и обладающие следующими свойствами:

- 1) операторы $\bar{Q}_N$ и $\bar{P}_N$ ограничены, а $\bar{Q}_N$ еще и непрерывен из F_N в F ;
- 2) $P_N \bar{P}_N = E$;

3) на элементе $\bar{u} \in U$ выполнено неравенство

$$\|P_N \bar{u}\|_{U_N} \leq k \|\bar{u}\|_{C(\Pi_n)};$$

4) для всякого $f \in F$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \bar{Q}_N Q_N f\|_F = 0.$$

Если U_N и F_N интерпретируются как пространства сеточных функций, заданных на сетке

$$\omega_N^n = \left\{ (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n}) : x_j^{i_j} = a_j + h_j(i_j - 1); i_j = 1, 2, \dots, N; \right. \\ \left. h_j = \frac{b_j - a_j}{N - 1}; j = 1, 2, \dots, n \right\} \subset \Pi_n,$$

то в качестве таких операторов P_N и Q_N можно выбрать операторы простого сноса на ω_N^n (2). Построение операторов воспроизведения $\bar{P}_N$ и $\bar{Q}_N$ обсуждалось в работе (1).

Введем конечномерный оператор Λ_N с областью определения $D(\Lambda_N) = U_N$ и областью значений $R(\Lambda_N) \subseteq F_N$. Назовем Λ_N аппроксимирующим оператор исходной задачи L на элементе $u \in U$, если мера аппроксимации

$$\tilde{\chi}_N(u) = \|Q_N L u - \Lambda_N P_N u\|_{U_N}$$

стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Будем предполагать, что Λ_N аппроксимирует L , причем выполнено неравенство

$$\tilde{\chi}_N(u) \leq \Psi(h_N, \|u\|_U);$$

здесь $h_N = (h_1^N, h_2^N, \dots, h_m^N)$, $h_i^N \geq 0$, — неизвестный вектор постоянной размерности m , зависящий от N так, что

$$\|h_N\|^2 = \sum_{i=1}^m (h_i^N)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Непрерывная неотрицательная, монотонно не убывающая по второму аргументу функция Ψ такова, что при каждом фиксированном $u \in U$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi(h_N, \|u\|_U) = 0.$$

Функцию Ψ можно найти явно для широкого класса задач.

Рассмотрим разностную схему для уравнения (2):

$$\Lambda_N u_N = f_{N, \delta}, \quad u_N \in U_N,$$

где $f_{N, \delta} \in F_N$ — некоторое приближение для $\bar{f}$ в следующем смысле:

$$\|Q_N \bar{f} - f_{N, \delta}\|_{F_N} \leq \delta.$$

Тогда вместо точных данных задачи (2) $\{L, \bar{f}\}$ задана совокупность приближенных конечно-разностных данных

$$S = S(N, \delta) = \{N, U_N, F_N, Q_N, \bar{Q}_N, P_N, \bar{P}_N, \Psi, \Lambda_N, f_{N, \delta}, h_N, \delta\},$$

по которым необходимо построить «каркас» приближенного решения (8) $u_{N, s} \in U_N$ задачи (2) так, чтобы само приближенное решение $u_s = \bar{P}_N u_{N, s}$ сходилась в метрике $C(\Pi_n)$ к $\bar{u}$ при $N \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$.

3. Используя для решения этой неустойчивой в общем случае задачи метод регуляризации А. Н. Тихонова, возьмем в качестве «каркаса» приближенного решения $u_{N, s}$ любой элемент $u_{S, N}^{as}$, реализующий глобальный минимум функционала

$$M_s^\alpha[u_N] = \alpha \|u_N\|_{U_N}^2 + \|\Lambda_N u_N - f_{N, \delta}\|_{F_N}^2, \quad u_N \in U_N, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

при $\alpha = \alpha_s$. Существование такой экстремали установлено в ⁽¹⁰⁾, методы ее отыскания хорошо разработаны ⁽¹¹⁾.

Сходимость приближенного решения $u_s = \bar{P}_N u_{N,S}^{\alpha_s}$ к $\bar{u}$ в $C(\Pi_n)$ обеспечивается надлежащим выбором параметра регуляризации α_s по совокупности S (см. ^(10, 11)). Отметим, что с точки зрения практической реализации нахождения экстремали $u_{N,S}^{\alpha_s}$ для дифференцируемого функционала (3) сводится к решению разностной схемы

$$\text{grad } M_s^{\alpha_s}[u_N] = 0, \quad (4)$$

которая будет устойчива в силу выбора α_s .

4. Остановимся на проблеме конструктивного выбора параметра регуляризации. При решении некорректных (неустойчивых) задач широкое распространение получил так называемый выбор по невязке ⁽¹²⁾. Для линейных задач с приближенно заданным оператором в работе ⁽⁷⁾ предложен выбор по обобщенному принципу невязки. Такой подход для нелинейных задач, однако, встречает ряд трудностей, для преодоления которых в ⁽¹³⁾ использован альтернативный выбор параметров регуляризации. Тем не менее оказывается, что в ряде случаев при решении нелинейных задач с приближенно заданным оператором возможен выбор α по обобщенному принципу невязки.

Пусть $u_{N,S}^{\alpha}$ — какая-либо экстремаль функционала (3), отвечающая параметру регуляризации α . Введем функции

$$\beta_s(\alpha) = \|\Lambda_N u_{N,S}^{\alpha} - f_{N,S}\|_{F_N}^2, \quad \gamma_s(\alpha) = \|u_{N,S}^{\alpha}\|_{U_N}^2, \quad \varphi_s(\alpha) = M_s^{\alpha}[u_{N,S}^{\alpha}],$$

определенные при $\alpha > 0$; свойства этих функций изучены в ^(12, 7).

Лемма 1. Если функция $\beta_s(\alpha)$ разрывна в некоторой точке $\alpha = \alpha^* > 0$, то функционал (3) имеет при $\alpha = \alpha^*$ не менее двух экстремалей, реализующих его глобальный минимум в U_N .

Следствием этой леммы служит

Теорема 1. Пусть функционал (3) имеет при каждом $\alpha > 0$ единственную экстремаль.

Тогда обобщенная невязка

$$\rho_s(\alpha) = \beta_s(\alpha) - (\delta + \Psi(h_N, \sqrt{\gamma_s(\alpha)}))^2 - \mu_s,$$

где $\mu_s = \inf_{u_N \in U_N} \|\Lambda_N u_N - f_{N,S}\|_{F_N}^2$, непрерывна при $\alpha > 0$.

Пользуясь этим, а также некоторыми другими свойствами обобщенной невязки (см. ⁽⁷⁾), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть

$$\|\Lambda_N 0 - f_{N,S}\|_{F_N}^2 > \mu_s + (\delta + \Psi(h_N, 0))^2.$$

Тогда при выполнении условия теоремы 1 уравнение $\rho_s(\alpha) = 0$ имеет по крайней мере один корень $\alpha_s > 0$.

Выберем в качестве значения параметра регуляризации любой из корней этого уравнения $\alpha_{S(N,S)}$ и построим по соответствующей экстремали функционала (3) $u_{N,S(N,S)}^{\alpha_{S(N,S)}}$ приближенное решение исходной задачи

$$u_{S(N,S)} = \bar{P}_N u_{N,S(N,S)}^{\alpha_{S(N,S)}}.$$

Теорема 3. Имеет место сходимость

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \|\bar{u} - u_{S(N,S)}\|_{C(\Pi_n)} = 0.$$

Тем самым показано, что выбор α по обобщенному принципу невязки в предположениях теорем 1, 2 обеспечивает построение устойчивой разностной схемы (4) решения краевой задачи (1).

Когда проверка условия теоремы 1 для рассматриваемой задачи затруднена, может быть использован альтернативный выбор параметра α . Назовем непрерывную, монотонно неубывающую функцию $\bar{\omega}_s^\varepsilon(\alpha)$ верхним ε -сглаживанием для $\gamma_s(\alpha)$, если $\bar{\omega}_s^\varepsilon(\alpha) \geq \gamma_s(\alpha)$ и $\text{mes}\{\alpha: \bar{\omega}_s^\varepsilon(\alpha) \neq \gamma_s(\alpha)\} \leq \varepsilon$.

Лемма 2. Для каждой функции $\gamma_s(\alpha)$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{\omega}_s^\varepsilon(\alpha)$.

Построение верхнего ε -сглаживания производится с помощью интерполяционных методов.

Пусть

$$\bar{\gamma}_s^\varepsilon(\alpha) = \mu_s + (\delta + \Psi(h_N, \sqrt{\bar{\omega}_s^\varepsilon(\alpha)}))^2.$$

Определим для $\varepsilon > 0$ и фиксированного, не зависящего от δ и N числа C ,

$$1 < C < \| \Lambda_N 0 - f_{N, \delta} \|_{F_N}^2 / ((\delta + \Psi(h_N, 0))^2 + \mu_s),$$

множества

$$\mathfrak{A}_s^\varepsilon(C) = \{\alpha: \alpha > 0, 0 \leq \rho_s(\alpha) \leq (C-1) \cdot \bar{\gamma}_s^\varepsilon(\alpha)\},$$

$$\mathfrak{B}_s^\varepsilon(C) = \{\alpha: \alpha > 0, \rho_s(\alpha) \leq 0, \varphi_s(\alpha) \geq C \bar{\gamma}_s^\varepsilon(\alpha)\}.$$

Теорема 4. Множество $\mathfrak{R}_s^\varepsilon(C) = \mathfrak{A}_s^\varepsilon(C) \cup \mathfrak{B}_s^\varepsilon(C)$ непусто.

Эта теорема позволяет сделать альтернативный выбор параметра $\alpha: \alpha_s(\varepsilon, N, \delta) \in \mathfrak{R}_s^\varepsilon(C)$ и построить приближенное решение задачи (1)

$$u_{S(\varepsilon, N, \delta)} = \bar{P}_N u_{N, S(\varepsilon, N, \delta)}^{\alpha_s(\varepsilon, N, \delta)}.$$

Теорема 5. При $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ $u_{S(\varepsilon, N, \delta)} \rightarrow \bar{u}$ в $C(\Pi_n)$.

Отметим, что в случае неединственности решения исходной задачи теоремы 3, 5 гарантируют сходимость приближений к нормальному решению (1).

Численные эксперименты на ЭВМ показали эффективность предлагаемой методики построения устойчивых разностных схем. Результаты, касающиеся выбора параметра α , справедливы и в общем случае при решении нелинейных задач с приближенным оператором.

Автор выражает свою глубокую признательность акад. А. Н. Тихонову за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., 1971.
- ² А. А. Самарский, А. Б. Гудин, Устойчивость разностных схем, М., 1973.
- ³ Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., 1972.
- ⁴ А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 2, № 1, 25 (1962).
- ⁵ А. Н. Тихонов, ДАН, т. 153, № 1, 49 (1963).
- ⁶ А. П. Тихонов, ДАН, т. 151, № 3, 501 (1963).
- ⁷ А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, ДАН, т. 203, № 6, 1238 (1972).
- ⁸ М. К. Гавурин, Лекции по методам вычислений, М., 1971.
- ⁹ А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 14, № 1, 13 (1974).
- ¹⁰ А. Н. Тихонов, ДАН, т. 161, № 5, 1023 (1965).
- ¹¹ А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 5, № 3, 463 (1965).
- ¹² В. А. Морозов, Там же, т. 8, № 2, 295 (1968).
- ¹³ А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, ДАН, т. 214, № 3, 499 (1974).