

УДК 513.83:519.54

МАТЕМАТИКА

А. А. МАЛЬЦЕВ, Б. С. НУРУТДИНОВ

ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 14 V 1975)

1. В работе ⁽¹⁾ А. И. Мальцевым построена теория итеративных алгебр над произвольным множеством в ее связи с теорией алгебр Поста. В настоящей работе строится топологический вариант этой теории, именно изучаются итеративные алгебры непрерывных функций над топологическим пространством. Одной из мотивировок такого изучения служит отмеченная в работе ⁽²⁾ аналогия между теоремой Колмогорова ⁽³⁾ о суперпозициях функций и теоремой Слупецкого о базисах в алгебрах Поста.

2. Пусть X — произвольное непустое множество, а X^n для любого целого $n \geq 1$ — его декартова степень (в дальнейшем наделенная структурой топологического произведения или группового произведения, когда такой структурой будет наделено X). Нам потребуются функции из одной степени множества X в другую $i: X \rightarrow X$, $\Delta: X \rightarrow X^2$, $\pi: X^2 \rightarrow X$ и для каждого целого $n \geq 1$ также $\zeta_n: X^n \rightarrow X^n$ и $\tau_n: X^n \rightarrow X^n$, задаваемые соответственно соотношениями

$$i(x) = x; \Delta(x) = (x, x); \pi(x_1, x_2) = x_2;$$

$\zeta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$; $\tau_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$ для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Отметим, что по определению $\zeta_1 = \tau_1 = i$.

Обозначим через $P_n(X)$ для каждого целого $n \geq 1$ множество всех n -местных функций на X со значениями снова в X , т. е.

$$P_n(X) = \{f | f: X^n \rightarrow X\},$$

и положим

$$P(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X).$$

Определим операции $\zeta: P \rightarrow P$, $\tau: P \rightarrow P$, $\Delta: P \rightarrow P$, $\nabla: P \rightarrow P$; $*$: $P^2 \rightarrow P$ на $P = P(X)$ формулами

$$\zeta f = f \circ \zeta_n \quad \text{при} \quad f \in P_n(X); \quad (1)$$

$$\tau f = f \circ \tau_n \quad \text{при} \quad f \in P_n(X); \quad (2)$$

$$\Delta f = \begin{cases} f \circ (\Delta \times \underbrace{i \times \dots \times i}_{n-1}) & \text{при } f \in P_n(X) \text{ и } n \geq 3, \\ f \circ \Delta & \text{при } f \in P_2(X), \\ f & \text{при } f \in P_1(X); \end{cases} \quad (3)$$

$$\nabla f = \begin{cases} f \circ (\pi \times \underbrace{i \times \dots \times i}_{n-1}) & \text{при } f \in P_n(X) \text{ и } n \geq 2, \\ f \circ \pi & \text{при } f \in P_1(X); \end{cases} \quad (4)$$

$$f * g = \begin{cases} f \circ (g \times \underbrace{i \times \dots \times i}_{n-1}) & \text{при } f \in P_n(X), g \in P_m(X) \text{ и } n \geq 2 \\ f \circ g & \text{при } f \in P_1(X) \text{ и } g \in P_m(X), \end{cases} \quad (5)$$

где под $f \circ g: X \rightarrow Z$ понимается обычная суперпозиция функций $f: X \rightarrow Z$ и $g: X \rightarrow Y$, а под $f \times g: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ — прямое произведение $(x_1, x_2) \rightarrow$

$(f(x_1), g(x_2))$ отображений $f: X_1 \rightarrow Y_1$ и $g: X_2 \rightarrow Y_2$. Алгебраическая система (короче, алгебра) $\mathfrak{P}(X) = \{P(X); \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *\}$ и называется, следуя А. И. Мальцеву ⁽¹⁾, итеративной алгеброй над множеством X ; алгебра $\mathfrak{P}^* = \{P; \zeta, \tau, \Delta, *\}$ при этом называется предытеративной алгеброй (над X).

3. Пусть теперь X — топологическое пространство, которое мы всегда будем предполагать удовлетворяющим аксиоме T_1 . Поскольку класс непрерывных функций замкнут относительно операций $\circ$ и $\times$ и поскольку все функции $i, \Delta, \pi, \zeta_n, \tau_n$ непрерывны, множество всех непрерывных функций из $P(X)$ образует подалгебры в $\mathfrak{P}(X)$ и в $\mathfrak{P}^*(X)$, которые и будут называться соответственно итеративной и предытеративной алгебрами над топологическим пространством X . Сохраним в дальнейшем все введенные обозначения именно для алгебр непрерывных функций.

4. Под конгруэнцией на алгебре $\mathfrak{P}(X)$ или $\mathfrak{P}^*(X)$ понимается, как обычно, отношение эквивалентности, сохраняемое операциями в алгебре. Как и в абстрактном случае, на алгебре $\mathfrak{P}(X)$, и тем самым на алгебре $\mathfrak{P}^*(X)$, имеются конгруэнции $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_a$:

$$f \equiv g \bmod \kappa_0 \Leftrightarrow f = g,$$

$$f \equiv g \bmod \kappa_1 \text{ для любых } f, g.$$

$$f \equiv g \bmod \kappa_a \Leftrightarrow \text{арн } f = \text{арн } g,$$

где под $\text{арн } f$ понимается число аргументов функции f . В ⁽¹⁾ показано *, что — в случае абстрактного множества — на $\mathfrak{P}^*(X)$ (и тем самым на $\mathfrak{P}(X)$) никаких других конгруэнций нет. Для алгебр непрерывных функций это не так. Действительно, если обозначить $[f]$ гомотопический класс отображения $f: X^n \rightarrow X$, то соотношение

$$f \equiv g \bmod \kappa_\Gamma \Leftrightarrow \text{арн } f = \text{арн } g \text{ и } f \geq g$$

определяет, как показывает прямая проверка, конгруэнцию на $\mathfrak{P}(X)$, вообще говоря, отличную от указанных ранее трех. Более точно, имеет место

Теорема 1. *Отображение $f \mapsto [f]$ вносит для любого линейно связного X в множество $P_\Gamma(X) = \{[f] \mid f \in P\}$ гомотопических классов отображений $f \in P(X)$ структуру итеративной алгебры; обозначим ее $\mathfrak{P}_\Gamma(X) = \{P_\Gamma(X); \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *\}$.*

Если κ — любая отличная от κ_0 конгруэнция на $\mathfrak{P}(X)$, то соотношение

$$[f] \equiv [g] \bmod \overline{\kappa} \Leftrightarrow f \equiv g \bmod \kappa \quad (6)$$

определяет конгруэнцию на алгебре $\mathfrak{P}_\Gamma(X)$.

Обратно, любая конгруэнция на $\mathfrak{P}_\Gamma(X)$ может быть получена с помощью соотношения (6) из некоторой конгруэнции на $\mathfrak{P}(X)$.

Аналогичное утверждение верно и для предытеративных алгебр.

Прямым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть пространство X стягиваемо. Тогда на $\mathfrak{P}^*(X)$ и тем более на $\mathfrak{P}^*(X)$ нет других конгруэнций, кроме $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_a$.*

Аналогичная теорема верна и в других условиях. Например, справедлива

Теорема 3. *Если X — обобщенный канторов дисконтинуум, то на $\mathfrak{P}^*(X)$ и тем более на $\mathfrak{P}(X)$ нет других конгруэнций, кроме κ_0, κ_1 и κ_a .*

В то же время условие стягиваемости, точнее, тривиальности (ко)гомотопических групп, существенно. Действительно, теорема 1 позволяет описать все конгруэнции на $\mathfrak{P}^*(X)$, например, для случая, когда X есть окружность S (рассматриваемая в естественной топологии со структурой аддитивно записываемой абелевой группы). Положим для любого целого $k \geq 1$

* В действительности в ⁽¹⁾ доказывалось более сильное утверждение, касающееся конгруэнций на подалгебрах итеративной алгебры.

и любой последовательности $n_1, \dots, n_k$ длины k целых чисел

$$f_{n_1, n_2, \dots, n_k}(x_1, \dots, x_k) = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k.$$

Тем самым определена функция $f_{n_1, \dots, n_k}: S^k \rightarrow S$. Прямая проверка показывает, что

$$\xi f_{n_1, \dots, n_k} = f_{n_k, n_1, \dots, n_{k-1}}; \quad (7)$$

$$\tau f_{n_1, \dots, n_k} = f_{n_2, n_1, n_3, \dots, n_k}; \quad (8)$$

$$\Delta f_{n_1, \dots, n_k} = f_{n_1+n_2, n_3, \dots, n_k}; \quad (9)$$

$$\nabla f_{n_1, \dots, n_k} = f_{0, n_1, n_2, \dots, n_k}; \quad (10)$$

$$f_{n_1, \dots, n_k} * f_{m_1, \dots, m_l} = f_{n_1 m_1, n_1 m_2, \dots, n_1 m_l, n_2, \dots, n_k} \quad (11)$$

Таким образом, совокупность $\{f_{n_1, \dots, n_k}\} \subseteq P(X)$ образует в алгебрах $\mathfrak{P}(X)$ и $\mathfrak{P}^*(X)$ соответственно подалгебры $\mathfrak{S}(X)$ и $\mathfrak{S}^*(X)$. Несложные гомотопические рассуждения показывают, что эти подалгебры изоморфны соответственно алгебрам $\mathfrak{P}_-(X)$ и $\mathfrak{P}_+^*(X)$.

С другой стороны, прямая проверка показывает, что для любого целого $p \geq 2$ соотношение

$$f_{n_1, \dots, n_k} \equiv f_{m_1, \dots, m_l} \pmod{\bar{\kappa}_p} \Leftrightarrow k=l \text{ и } n_i \equiv m_i \pmod{p}, i=1, \dots, k,$$

дает нам новую конгруэнцию на $\mathfrak{S}(X)$, и потому на $\mathfrak{S}^*(X)$. Более того, справедлива

Теорема 4. На алгебре $\mathfrak{P}(S)$ и тем более на $\mathfrak{P}^*(S)$ имеются конгруэнции $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ и для любого целого $p \geq 2, \kappa_p$

$$f \equiv g \pmod{\kappa_p} \Leftrightarrow [f] \equiv [g] \pmod{\bar{\kappa}_p},$$

где через $[f]$ обозначена единственная функция вида $f_{n_1, \dots, n_k}$, для которой $f \equiv [f] \pmod{\kappa_p}$. Никаких других конгруэнций на алгебре $\mathfrak{P}^*(S)$ и тем более на алгебре $\mathfrak{P}(S)$ нет.

5. Рассмотрим вопрос об определмости топологического пространства X алгебрами $\mathfrak{P}(X)$ и $\mathfrak{P}^*(X)$ непрерывных функций над X . Оказывается, справедлива та же теорема, что и для полугрупп отображений. Для ее формулировки нам нужны следующие два понятия. Скажем, что в пространстве X достаточно много прообразов точек, если система подмножеств $\{f^{-1}(x) \mid x \in X, f \in P(X)\}$ образует предбазу замкнутых множеств в X . Аналогично скажем, что в пространстве X достаточно много неподвижных подмножеств, если предбазу замкнутых множеств в X образует система $\{\{x \in X \mid f(x) = x\} \mid f \in P(X)\}$. Справедлива

Теорема 5. Пусть X и Y — любые два топологических пространства и

$$\varphi: X \rightarrow Y \quad (12)$$

есть гомеоморфное отображение одного на другое.

Тогда для любого $f \in P_n(X)$ соотношение

$$(\varphi f)(y_1, \dots, y_n) = \varphi(f(\varphi^{-1}(y_1), \dots, \varphi^{-1}(y_n))) \quad (13)$$

осуществляет изоморфное отображение

$$\varphi: \mathfrak{P}^*(X) \rightarrow \mathfrak{P}^*(Y) \quad (14)$$

предытеративной алгебры $\mathfrak{P}^*(X)$ на $\mathfrak{P}^*(Y)$.

Обратно, в случае когда либо в каждом из пространств X, Y достаточно много прообразов точек, либо в каждом из них достаточно много неподвижных подмножеств, из существования изоморфизма (14) между их предытеративными алгебрами непрерывных функций вытекает существование гомеоморфизма (12) между пространствами X и Y , для которого выполнено соотношение (13).

Аналогичная теорема справедлива для итеративных алгебр.

Следствие. При $X=I$, $X=S$, $X=D^*$ все автоморфизмы алгебр $\mathfrak{P}(X)$ и $\mathfrak{P}^*(X)$ внутренние.

6. В целях полноты приведем прямо укладывающуюся в предлагаемую теорию теорему из ⁽²⁾:

Теорема 6. Пусть X — одно из пространств D^* , k -мерный куб, k -мерный тор, обобщенный цилиндр (т. е. произведение окружностей и отрезков).

Тогда существует в $P(X)$ такая функция $\varphi \in P_2(X)$, что множество $\{\varphi, P_1(X)\}$ порождает всю предитеративную алгебру $\mathfrak{P}^*(X)$ и тем более всю итеративную алгебру $\mathfrak{P}(X)$.

Авторам неизвестно, верна ли эта теорема, когда X есть двумерная сфера.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. И. Мальцев, Алгебра и логика, т. 5, в. 2, 5 (1966). ² А. А. Мальцев, ДАН, т. 188, № 1, 33 (1969). ³ А. Н. Колмогоров, ДАН, т. 114, 953 (1957).