

УДК 531.19

МАТЕМАТИКА

С. А. МОЛЧАНОВ, Ю. Н. СУДАРЕВ

ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 V 1975)

Сферическая модель введена ⁽¹⁾ Берлином и Кацем как грубое, но аналитически удобное приближение к многомерной модели Изинга. Она представляет собой модель решетчатого ферромагнетика с общим парным взаимодействием и сферическим «законом сохранения»

$$\sum_i \sigma_i^2 = N,$$

где N — число частиц, σ_i — спин i -й частицы. Это соотношение заменяет известное условие Изинга $\sigma_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, N$. В работе ⁽¹⁾ вычислены термодинамические функции в данной модели; там же изучался вопрос о наличии и характере фазовых переходов.

Наша цель — изучить предельное поведение гиббсовских распределений при $N \rightarrow \infty$ в первую очередь вблизи критической точки. Мы рассматриваем этот вопрос только для простейших периодических условий. В случае общих граничных условий задача существенно труднее и тесно связана с вопросом о влиянии граничных условий на старшие собственные значения матричных форм. Пусть Z^v — v -мерная целочисленная решетка, $\rho(\mathbf{p}; -\mathbf{p};) \geq 0$, $\mathbf{p}_1, 2 \in Z^v$, потенциал парного взаимодействия (который мы для простоты предполагаем финитным). Пусть, далее,

$$\rho(\mathbf{p}) = \rho(-\mathbf{p}), \quad \sum_{\mathbf{p}} \rho(\mathbf{p}) = 1.$$

Положим

$$\hat{\rho}(x) = \sum_{\mathbf{p} \in Z^v} \rho(\mathbf{p}) \exp \{i(\mathbf{p}, x)\}, \quad x \in S^v; \quad (1)$$

другими словами, $\hat{\rho}(x)$ — преобразование Фурье функции $\rho(\mathbf{p})$, определенное на торе S^v .

Обозначим через T_N v -мерный целочисленный тор, содержащий $N = N_1^v = (2m+1)^v$ точек. Состояниями из N частиц являются векторы на сфере

$$\sigma_N = \{\sigma_N(i); i = (i_1, i_2, \dots, i_v), -m \leq i_k \leq m\}; \quad (\sigma_N, \sigma_N) = N.$$

Плотность гиббсовского распределения имеет вид

$$p(\sigma_N) = \frac{1}{Z_N} \exp \left\{ \beta \sum_{i, j \in T_N} \rho(i-j) \sigma_N(i) \sigma_N(j) \right\} = \frac{1}{Z_N} \exp \{ \beta E(\sigma_N) \}, \quad (2)$$

где малая статистическая сумма Z_N задается интегралом

$$Z_N = Z_N(\beta) = \int_{(\sigma_N, \sigma_N) = N} \exp \{ \beta E(\sigma_N) \} d\sigma_N. \quad (3)$$

Для средних значений по гиббсовской мере (2) мы будем употреблять обозначение M_N .

Один из основных результатов Берлина и Каца состоит в том, что фазовый переход в системе происходит тогда и только тогда, когда

$$\beta_0 = \frac{1}{2(2\pi)^v} \int_{S^v} \frac{1}{[\hat{\rho}(0) - \hat{\rho}(x)]} dx = \frac{1}{2(2\pi)^v} \int_{S^v} \frac{1}{[1 - \hat{\rho}(x)]} dx < \infty, \quad (4)$$

где β_0 — критическая температура. Для финитных потенциалов фазовый переход имеет место лишь при $v \geq 3$.

Теперь общую задачу можно сформулировать следующим образом: пусть на «торах» $T_N = T_{(2m+1)^v}$, $m=1, 2, \dots$, задана последовательность функций $f_N(\mathbf{i})$, $\mathbf{i} \in T_N$; требуется найти предельное распределение величины $\Phi_N = (f_N, \sigma_N)$ относительно гиббсовской меры (2) (вообще говоря, величина Φ_N нормируется). Важный частный случай получается при $f_N \equiv 1$; при этом Φ_N совпадает с суммарным спином, изучение которого интересно с различных точек зрения (²⁻⁵).

Для решения задачи приходится исследовать асимптотику характеристической функции

$$\varphi_N(\lambda) = M_N \exp \{i\lambda (f_N, \sigma_N)\}$$

при помощи различных вариантов метода перевала; при этом нужно по отдельности разобрать три существенно разных случая: $\beta < \beta_0$, $\beta = \beta_0$, $\beta > \beta_0$. Введем функцию

$$R(\mathbf{i}) = \frac{1}{2(2\pi)^v} \int_{S^v} \frac{\cos(\mathbf{i}, x) dx}{[s(\beta) - \hat{\rho}(x)]}, \quad (5)$$

где при $\beta < \beta_0$ $s(\beta)$ — это корень уравнения

$$\frac{1}{2(2\pi)^v} \int_{S^v} \frac{1}{[s - \hat{\rho}(x)]} dx = 1,$$

и $s(\beta) = \beta$ при $\beta \geq \beta_0$.

Теорема 1. *Предположим, что существует*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (R f_N, f_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in T_N} R(\mathbf{i} - \mathbf{j}) f_N(\mathbf{i}) f_N(\mathbf{j}) = \delta^2.$$

Тогда

$$\varphi_N(\lambda) = M_N \exp \{i\lambda (f_N, \sigma_N)\} \rightarrow \exp \{-\lambda^2 \delta^2 / 2\}.$$

Другими словами, предельное гиббсовское поле при $\beta < \beta_0$ представляет собой стационарное гауссовское поле на Z с корреляционной функцией $R(\mathbf{i} - \mathbf{j})$. Отметим, что корреляции $R(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ экспоненциально убывают на бесконечности. Для суммарного спина $\xi_N = (1, \sigma_N)$ после стандартной нормировки на $\sqrt{N}$ получается при $N \rightarrow \infty$ соотношение

$$\varphi_N(\lambda) \rightarrow \exp \{-\lambda^2 / 4 [s(\beta) - \beta]\}.$$

т. е. предельное распределение нормально с дисперсией $\delta^2 = 1/2 [s(\beta) - \beta]$. При $\beta \rightarrow \beta_0$ эта дисперсия неограниченно возрастает, а ее асимптотика существенно зависит от размерности v , и природы потенциала.

Случай $\beta > \beta_0$ также сравнительно прост. Грубо говоря, предельное гиббсовское поле складывается в этом случае из гауссовского стационарного поля с корреляционной функцией (5) и независимого от него постоянного поля $\xi(p) \equiv \xi_0$, принимающего с вероятностями $1/2$ значения $\pm \sqrt{1 - \beta_0/\beta}$. Поле ξ обеспечивает дальний порядок и спонтанную намагниченность $M = \sqrt{1 - \beta_0/\beta}$ (⁴). Соответствующее точное утверждение таково.

Теорема 2. *Пусть существуют пределы*

$$a) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{c}{N^2} (f_N, 1)^2 = \delta_1^2 > 0;$$

$$б) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in T_N} R(\mathbf{i} - \mathbf{j}) f_N(\mathbf{i}) f_N(\mathbf{j}) = \delta_2^2 > 0.$$

Тогда, при некоторых дополнительных технических предположениях,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(\lambda) = \exp \{-\lambda^2 \delta_2^2 / 2\} \cos (\sqrt{1 - \beta_0 / \beta} \delta_1).$$

Теперь уже функция $R(i-j)$ имеет на бесконечности только степенную асимптотику:

$$R(i-j) = O(|i-j|^{-\nu}).$$

Перейдем к изучению критической точки. Снова рассмотрим суммарный спин ξ_N .

Теорема 3. Если $\beta = \beta_0$, то для $N \rightarrow \infty$:

а) при $\nu \geq 5$

$$P_N \{ \xi_N / N^{3/4} < x \} \rightarrow c_1 \int_{-\infty}^x \exp \{-c_2 t^4\} dt = G(x);$$

б) при $\nu = 4$

$$P_N \{ \xi_N \ln N / N^{3/4} < x \} \rightarrow c_3 \int_{-\infty}^x \exp \{-c_4 t^4\} dt = G(x);$$

в) при $\nu = 3$

$$P \{ \xi_N / N^{2/3} < x \} \rightarrow D(x),$$

где $D(x)$ — вероятностный закон с характеристической функцией

$$\begin{aligned} \psi_D(\lambda) = c_5 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}^3} \left[\ln \left(1 + \frac{is}{1 + (Bp, p)} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{is}{1 + (Bp, p)} \right] - \frac{\lambda^2}{4\beta_0(1+is)} \right\} ds \end{aligned}$$

(здесь c_i — константы, а B — матрица ковариаций потенциала ρ .)

Отметим, что предельные законы $G(x)$ и $D(x)$ можно рассматривать как смеси комплексных гауссовых мер с комплексными весами.

Гиббсовские поля в критической точке $\beta = \beta_0$ допускают следующее простое описание.

Теорема 4. При $\nu \geq 4$ гиббсовское поле $g_N(i)$, $i \in T_N$, разлагается на две независимые компоненты:

$$g_N(i) = \xi_N / \varepsilon_N + \gamma_N(i),$$

где $\varepsilon_N = N^{3/4}$ при $\nu \geq 5$ и $\varepsilon_N = N^{3/4} \ln N$ при $\nu = 4$; величина ξ_N асимптотически распределена по закону $G(x)$, а распределение $\gamma_N(i)$ слабо сходится при $N \rightarrow \infty$ к гауссовскому стационарному полю на $\mathbb{Z}^3$ с корреляционной функцией (5).

При $\nu = 3$ ситуация более сложна. Как и выше, удастся доказать, что конечномерные распределения гиббсовского поля $g_N(i)$, $i \in T_N$, сходятся к гауссовским распределениям с корреляциями (5). Предельную нормальность удастся установить и для всех функционалов (f_N, σ_N) , достаточно хорошо аппроксимируемых конечномерными. Однако существует обширный класс функционалов (f_N, σ_N) , для которых предельное распределение не является нормальным. Пусть $F(x)$, $x \in S^3$, — непрерывная функция на трехмерном торе. Положим $f_N(i) = F(2\pi i / N_1)$, $i \in T_N$. Соответствующий функционал (f_N, σ_N) мы назовем функционалом класса FS^3 .

Теорема 5. Если функционал (f_N, σ_N) принадлежит классу FS^3 , то при $N \rightarrow \infty$

$$P_N\{(f_N, \sigma_N)/N^{2/3} < x\} \rightarrow P \left\{ \int_{S^3} F(y) \eta(y) dy < x \right\},$$

где $\eta(y)$ — некоторый (негауссовский) процесс на S^3 .

Грубо говоря, при $v=3$ гиббсовское поле $g_N(i)$, $i \in T_N$, представляется в виде

$$g_N(i) = \eta(2\pi i/N_1)/N^{1/3} + \gamma_N(i),$$

где $\eta(x)$, $x \in S^3$, — введенное выше поле, а $\gamma_N(i)$ — асимптотически гауссова компонента с корреляционной функцией (5), независимая от η .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. H. Berlin, M. Kac, Phys. Rev., v. 86, 821 (1952). ² Устойчивость и фазовые переходы, М., «Мир» 1973. ³ А. Исихара, Статистическая физика. М., «Мир», 1973. ⁴ Г. Стенли, Фазовые переходы и критические явления. М., «Мир», 1973. ⁵ Ja. G. Sinai, P. A. Bleher, Comm. math. Phys., v. 33, 23 (1973).