

Ю. А. АМИНОВ

К ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 7 V 1975)

Хорошо известно, что замкнутая геодезическая линия в ориентируемом римановом пространстве четной размерности, положительной кривизны не дает минимума длины. Аналогичное свойство доказано для замкнутых минимальных гиперповерхностей в римановом пространстве положительной кривизны, а также для замкнутых минимальных подмногообразий сферы S^n (см. ⁽¹⁾). В недавней работе ⁽²⁾ было высказано предположение о том, что замкнутое минимальное подмногообразие, расположенное в полном односвязном римановом пространстве, неустойчиво, т. е. не дает минимума площади, если секционная кривизна пространства заключена в интервале $(1/4, 1]$. Это предположение возникло, по-видимому, в связи с теоремой о сфере (см. ⁽³⁻⁵⁾). Заметим, что исследование на устойчивость минимальных подмногообразий интересно и тем, что может дать некоторую информацию о гомотопических группах пространства.

В этой работе мы не требуем односвязности и полноты пространства, что может оказаться удобным в приложениях. Нами установлена следующая

Теорема 1. Пусть F^2 — минимальная поверхность, гомеоморфная сфере и расположенная в 4-мерном ориентируемом пространстве R^4 . Пусть секционная кривизна пространства K_σ для любой площадки σ в точках F^2 удовлетворяет неравенствам $1/4 < K_\sigma \leq 1$.

Тогда F^2 — неустойчивая поверхность.

Если же на $F^2 \subset R^4$ существует регулярное нормальное единичное векторное поле и кривизна R^4 лежит в интервале $[1/4, 1]$, то поверхность F^2 неустойчива.

В то же время в комплексном проективном пространстве $P^2(C)$ с метрикой Фубини, кривизна которого, как известно, лежит в интервале $[1/4, 1]$, существует вполне геодезическая сфера, дающая минимум площади среди близких. На такой поверхности нет регулярного поля единичных нормалей. Для поверхностей в n -мерном римановом пространстве установлена следующая

Теорема 2. Пусть F^2 — минимальная поверхность, гомеоморфная сфере и расположенная в n -мерном ориентируемом римановом пространстве R^n . Пусть кривизна R^n в точках F^2 лежит в интервале $(1/4, 1]$. Пусть на F^2 нормальный пучок тривиален.

Тогда F^2 — неустойчивая минимальная поверхность.

Если тензор конформной кривизны пространства в точках F^2 равен нулю, то в теоремах 1 и 2 условие принадлежности кривизны пространства интервалу $(1/4, 1]$ можно заменить на условие положительности кривизны.

Доказательство теорем проводится исследованием второй вариации $\delta^2 S$ площади поверхности. Устанавливается существование таких вариаций, при которых $\delta^2 S < 0$. Наметим доказательство теоремы 2. На F^2 можно ввести изотермические координаты u_1, u_2 с особенностями в точках, в которых линейный элемент F^2 имеет вид $\Lambda(du_1^2 - du_2^2)$.

при $z = u_1 + iu_2 \rightarrow \infty$ функция Λ убывает к нулю, как $1/|z|^4$. Пусть $y^h = y^h(u_1, u_2)$ — локальные уравнения $F^2 \subset R^n$. Пусть T_x и N_x — касательное и нормальное пространства для $x \in F^2$.

По условию тривиальности нормального пучка в каждой точке $x \in F^2$ существует ортонормированный базис $n_1, \dots, n_{n-2}$ в N_x , причем компоненты n_i являются регулярными функциями от x . Мы найдем два варьирующих поля из N_x , $V_i = \varepsilon \xi_i$, $i=1, 2$, где ε — некоторая функция на F^2 , ξ_1 и ξ_2 — единичные ортогональные векторы. Дополним их векторами $\xi_3, \dots, \xi_{n-2}$ до ортогонального базиса в N_x . С помощью коэффициентов кручения $\mu_{\tau\rho|\alpha}$ (см. (6), стр. 194) этого базиса запишем

$$\delta^2 S(V_i) = \int_{F^2} \left\{ |\text{grad } \varepsilon|^2 + \varepsilon^2 \sum_{\rho=1}^{n-2} \mu_{\rho i|\alpha} \mu_{\rho i}^\alpha - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 [2|K_e(\xi_i)| + K(e_1, \xi_i) + K(e_2, \xi_i)] \right\} dS,$$

где $K_e(\xi_i)$ — внешняя полная кривизна F^2 в направлении ξ_i , $K(e_i, \xi_j)$ — кривизна площадок в R^n , проведенной через e_i и ξ_j . Используя уравнения (47.14) из (6) и условие замкнутости F^2 , получим

$$\delta^2 S(V_1) - \delta^2 S(V_2) = \int_{F^2} \left\{ \frac{2}{\Lambda} [(\varepsilon_{u_1} + \varepsilon \mu_{12|2})^2 + (\varepsilon_{u_2} - \varepsilon \mu_{12|1})^2] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{\Lambda} \sum_{\rho=3}^{n-2} [(\mu_{1\rho|1} + \mu_{2\rho|2})^2 + (\mu_{1\rho|2} - \mu_{2\rho|1})^2] + \right. \\ \left. - \varepsilon^2 \left[2\kappa_T - 2T - 2|K_e(\xi_1)| - 2|K_e(\xi_2)| - \sum_{i,j=1}^2 K(e_i, \xi_j) \right] \right\} dS, \quad (1)$$

где $T = R_{12} \xi_1^1 \xi_2^2 / \Lambda$, а величина κ_T определяется с помощью $\Omega_{ij|k}$ — коэффициентов второй квадратичной формы F^2 в направлении ξ_i и является аналогом кручений Гаусса для поверхности из R^4 : $\kappa_T = -g^{ih}(\Omega_{11|2}\Omega_{2|j1} - \Omega_{1j|2}\Omega_{2|1})/\Lambda$. Легко поверить, что для минимальной поверхности

$$\kappa_T \leq |K_e(\xi_1)| + |K_e(\xi_2)|. \quad (2)$$

Заметим, что $\sum_{j=1}^{n-2} [(\mu_{1j|2} + \mu_{2j|1})^2 + (\mu_{1j|1} - \mu_{2j|2})^2]$ зависит только от выбора расщепления плоскостей, натянутых на ξ_1 и ξ_2 . Возьмем их так, чтобы выполнялась система

$$\varepsilon_{u_1} + \varepsilon \mu_{12|2} = 0, \quad \mu_{1j|1} + \mu_{2j|2} = 0, \quad (3) \\ \varepsilon_{u_2} - \varepsilon \mu_{12|1} = 0, \quad \mu_{1j|2} - \mu_{2j|1} = 0, \quad j=3, \dots, n-2.$$

Запишем разложение $\varepsilon \xi_k = a_{k\tau} n_\tau$, $k=1, \dots, n-2$. Выразим $\mu_{\rho\alpha|i}$ через коэффициенты кручения $\bar{\mu}_{\rho\alpha|i}$ базиса $n_1, \dots, n_{n-2}$:

$$\varepsilon^2 \mu_{\rho\alpha|i} = a_{\rho\tau} \frac{\partial a_{\alpha\tau}}{\partial u_i} + a_{\rho\tau} a_{\alpha\sigma} \bar{\mu}_{\tau\sigma|i}, \quad \alpha=1, 2. \quad (4)$$

Введем комплексный вектор U с компонентами $U_\tau = a_{1\tau} - ia_{2\tau}$; $\tau=1, \dots, n-2$. Используя (4), систему (3) приведем к виду

$$2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = BU, \quad (5)$$

где матрица $B = \|B_{\tau j}\| = \|\mu_{\tau j|1} + i\mu_{\tau j|2}\|$. Так как поля n_τ регулярны на F^2 , коэффициенты $B_{\tau j}$ на бесконечности убывают как $1/|z|^2$.

Из условия $|V_1|=|V_2|$ и $V_1 \perp V_2$ следует $U^2 = \sum U_\tau^2 = 0$. Доказывается, что (5) имеет решение U , определенное на всей плоскости, включая ∞ , такое, что $U^2 = 0$.

Возьмем V_1 и V_2 так, чтобы (5) и, следовательно, (3), выполнялось. Далее, если для любой площадки в R^n кривизна пространства лежит в интервале $[\delta, 1]$, то из неравенств Берже ((7), стр. 69) следует $|T| \leq \leq^{2/3}(1-\delta)$.

Используя (1) и (2), можем записать

$$\sum_{i=1}^2 \delta^2 S(V_i) \leq \int_{F^2} \varepsilon^2 \{2[\kappa_\Gamma - |K_e(\xi_1)| - |K_e(\xi_2)|] + \frac{4}{3}(1-\delta) - 4\delta\} dS < 0.$$

Следовательно, F^2 — неустойчивая поверхность.

Сформулируем теперь теорему об устойчивости.

Теорема 3. Пусть F^2 — минимальная, ориентируемая, быть может с границей, поверхность с ориентируемым R^4 . Если в точках F^2 выполняется неравенство $T + \kappa_\Gamma - 2|K_e| > 2K(\tau, \eta)$ для всех касательных векторов τ и нормальных векторов η , то F^2 — устойчивая поверхность.

В качестве иллюстрации этой теоремы укажем семейство пространств $R^4(t)$ с метрикой ds_t^2 заданной на $P^2(C)$ с однородными координатами z_i :

$$ds_t^2 = ds_\Phi^2 \left(\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2/t} \right)^2,$$

где ds_Φ^2 — метрика Фубини на $P^2(C)$, нормированная так, что ее кривизна из интервала $[1, 4]$. При каждом t поверхность $z_3=0$ — вполне геодезическая сфера F^2 . Можно найти, что в точках поверхности при каждом t имеет место $T=2$ и $K(\tau, \eta) = (2-t)/t$, где τ — касательный и η — нормальный вектор. По теореме 3 при $t > 1$ поверхность F^2 устойчива.

Заметим, что кривизна пространства в точках F^2 лежит в интервале $[(2-t)/t, 4/t]$. Поэтому при $0 < t < 1$ по теореме 1 поверхность F^2 неустойчива.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук СССР
Харьков

Поступило
25 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Simons, Ann. Math., v. 88, № 1, 62 (1968). ² H. B. Lawson, J. Simons, Ann. Math., v. 98, № 3, 427 (1973). ³ В. А. Топоногов, ДАН, т. 133, № 5, 1031 (1960). ⁴ W. Klingenberg, Comm. math. Helv., v. 35, 35 (1961). ⁵ M. Berger, Ann. Scuola Norm., Sup. Pisa, v. 3, 14, 161 (1960). ⁶ Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., 1948. ⁷ M. Berger, Bull. Soc. Math. France, v. 88, 57 (1960).