

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР Э. И. ГРИГОЛЮК, Н. А. КУЛАКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЕМ

Задача устойчивости тонких упругих пластин при наличии отверстия в рамках линейной теории сводится к последовательному решению плоской задачи теории упругости для нахождения докритического распределения напряжений и собственно задачи определения критической нагрузки сжатия, растяжения или сдвига как экстремального собственного значения краевой задачи, описываемой уравнением устойчивости Сен-Венана ⁽¹⁾ с переменными по области коэффициентами и соответствующими кинематическими граничными условиями для прогиба.

В большинстве работ, посвященных рассматриваемой проблеме, за исключением исследований, касающихся кольцевых пластин ⁽²⁾, докритическое напряженное состояние аппроксимируется приближенными формулами или считается равномерным; кроме того, применение вариационных методов для пластин с криволинейными контурами приводит обыкновенно к тому, что граничные условия для прогиба на одном из контуров удовлетворяются лишь в интегральном смысле.

Пусть пластина занимает двухсвязную область S с внутренней L_1 и внешней L_2 границами. Известно ⁽³⁾, что плоская задача теории упругости сводится к нахождению двух аналитических в области $\rho_1 < |\xi| < 1$ функций $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, удовлетворяющих граничному условию

$$\varphi(\sigma_j) + \omega(\sigma_j) \overline{\varphi'(\sigma_j)} / \overline{\omega'(\sigma_j)} = \overline{f_j(\sigma_j)} + C_j'; \quad j=1, 2, \quad (1)$$

где $\omega(\sigma)$ — функция, осуществляющая конформное преобразование кругового кольца $\rho_1 < |\xi| < 1$ на заданную область S , $\sigma_1 = \rho_1 \exp(i\theta)$, $\sigma_2 = \exp(i\theta)$, θ — полярный угол, C_1' , C_2' — комплексные постоянные, $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$ — известные функции внешней нагрузки.

Если отображающую функцию брать в виде

$$\omega(\xi) = \sum_{h=-m}^n C_h \xi^h, \quad (2)$$

тогда с помощью интегралов типа Коши задача сводится к функциональному уравнению ⁽⁴⁾

$$\begin{aligned} \varphi(1/\xi) - \overline{\varphi(\rho_1^2/\xi)} + \varphi'(\xi) [\overline{\omega(1/\xi)} - \overline{\omega(\rho_1^2/\xi)}] / \overline{\omega'(\xi)} = \\ = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (A_h - B_h) \xi^h + C_1' - C_2' \end{aligned} \quad (3)$$

и зависимостям

$$\psi(\xi) = -\overline{\varphi(1/\xi)} - \overline{\omega(1/\xi)} \varphi'(\xi) / \overline{\omega'(\xi)} + f_2(\xi) + \overline{C_2}'; \quad (4)$$

$$\psi(\xi) = -\overline{\varphi(\rho_1^2/\xi)} - \overline{\omega(\rho_1^2/\xi)} \varphi'(\xi) / \overline{\omega'(\xi)} + f_1(\xi) + \overline{C_1}', \quad (5)$$

где A_h , B_h — коэффициенты разложения в ряд Фурье функций $f_2(\xi)$, $f_1(\xi)$.

Будем искать решение в виде ряда

$$\varphi(\xi) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h \xi^h, \quad (6)$$

тогда уравнение (3) сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_k

$$\sum_{k=-m}^n \{ \bar{a}_{h-j} (1 - \rho_1^{2(h-j)}) k C_k + a_{h+j} (k+j) (1 - \rho_1^{2h}) \bar{C}_k \} = \sum_{k=-m}^n (A_{j-k} - B_{j-k}) k C_k - \\ + (C_2' - C_1') j C_j; \quad (7)$$

$$j=0, \pm 1, \dots$$

Для случая, когда L_2 — гладкая кривая и для функции нагрузки существует производная, система (7) квазирегулярна⁽⁵⁾ и ее можно решать методом редукции. Ограничиваясь в разложении (6) конечным числом членов t , из решения системы (7) определяем $\varphi_t(\xi)$. Компоненты напряженного состояния σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ вычисляются с использованием (5) по формулам

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \mp \frac{\exp(2i\theta)}{\overline{\omega'(\xi)}} \left[\left(\frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right)' \overline{\omega(\xi)} + \psi'(\xi) \right] \right\}, \quad (8)$$

$$\tau_{r\theta} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\exp(2i\theta)}{\overline{\omega'(\xi)}} \left[\left(\frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right)' \overline{\omega(\xi)} + \psi'(\xi) \right] \right\}$$

Точность аппроксимации определяется по разности полученных и заданных напряжений σ_r , $\tau_{r\theta}$ на контуре L_2 . В том случае, когда ошибка больше допустимой, необходимо увеличить число членов аппроксимирующего полинома и решать задачу снова.

При практическом решении системы (7) на ЭВМ вводилась подстановка $a_j = \alpha_j / j^2$, $a_{-j} = \rho_1^{2j} \beta_j$, $j=1, 2, \dots$, причем переход к прежним обозначениям осуществлялся не после решения системы, а в процессе вычисления напряжений через потенциалы Колосова по формулам (8). Такой подход позволяет избежать ошибки, связанной с ограниченностью разрядной сетки ЭВМ.

Компоненты напряженного состояния σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ вычислены в криволинейной ортогональной системе координат (ρ, θ) на плоскости z ($z = \omega(\xi)$). Эта координатная сетка образуется путем отображения системы взаимно ортогональных радиусов $\theta = \text{const}$ и окружностей $\rho = \text{const}$ из плоскости ξ на плоскость z функцией $\omega(\xi)$. Уравнение устойчивости Сен-Венана, записанное в координатах (ρ, θ) , имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{h}{D} (\sigma_r \kappa_\rho + \sigma_\theta \kappa_\theta + 2\tau_{r\theta} \kappa_{r\theta}), \quad (9)$$

где

$$\nabla^2(\) = \frac{1}{\rho H^2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial(\)}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\)}{\partial \theta} \right) \right),$$

$$\kappa_\rho = -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2 H^3} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{\rho H} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho H} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \\ - \frac{1}{\rho H^3} \frac{\partial(\rho H)}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \rho},$$

$$\kappa_{r\theta} = -\frac{1}{\rho H^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho H} \frac{\partial(\rho H)}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad H = |\omega'(\xi)|,$$

w — прогиб, h , $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — толщина и цилиндрическая жесткость пластины.

Граничные условия для шарнирно опертого внешнего и свободного внутреннего края пластины следующие:

$$M_{\rho}|_{\rho=1}=w|_{\rho=1}=M_{\rho}|_{\rho=\rho_1}=\left(Q_{\rho}-\frac{\partial M_{\rho\theta}}{\rho H \partial \theta}\right)\Big|_{\rho=\rho_1}=0, \quad (10)$$

$$M_{\rho}=D(\kappa_{\rho}+\nu \kappa_{\theta}), \quad Q=-\frac{D}{H} \frac{\partial}{\partial \rho}-(\nabla^2 w), \quad M_{\rho\theta}=-D(1-\nu) \kappa_{\rho\theta}.$$

Основное достоинство записи (9), (10) заключается в том, что контуры пластины L_1 , L_2 совпадают с координатными линиями ($\rho=\rho_1$, 1), а линии $\theta=\text{const}$ ортогональны им. Таким образом, при применении метода сеток отпадает необходимость переноса граничных условий, измельчения шага сетки и т. п.

Расписывая уравнение (9) с учетом граничных условий (10) в конечных разностях, получим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$(A-\lambda B)W=0, \quad (11)$$

где A , B — конечно-разностные аналоги дифференциальных операторов, стоящих в левой и правой частях уравнения (9), W — вектор-столбец неизвестных, $\lambda=k^2/D$ — критический параметр, k — общий множитель величин σ_{ρ} , σ_{θ} , $\tau_{\rho\theta}$.

Собственные векторы и собственные значения системы (11) находились методом вращения ⁽⁶⁾. Наименьшее положительное собственное значение соответствует критической нагрузке сжатия, наименьшее по модулю отрицательное собственное значение — критической нагрузке растяжения.

Изложенный алгоритм запрограммирован на языке АЛИОЛ и реализован на ЭВМ БЭСМ-6.

Была рассмотрена следующая задача: на шарнирно опертую по внешнему и внутреннему контуру квадратную пластину с круговым центральным отверстием радиуса R по оси OX ($\theta=0$) действует равномерно сжимающая нагрузка q . Отображающая функция в этом случае имеет вид

$$\omega(\xi)=a \sum_{k=0}^n C_{2k+1} \xi^{2k+1},$$

где a — сторона квадрата, $C_1=0,53925$

$$C_{2k+1}=-C_1 \frac{(2k-1)(4k-3)}{2k(4k+1)}.$$

При расчетах n выбиралось равное 9, при этом радиус закругления в угловых точках равен 0,0625 a .

Заданная точность $(q-\sqrt{\sigma_{\rho}^2+\tau_{\rho\theta}^2}) \cdot 100\%/q < 0,5\%$ достигалась при удержании в аппроксимирующем полиноме в зависимости от радиуса отверстия от 60 ($2R/a=0,4$) до 120 ($2R/a=0,7$) членов.

При решении задачи устойчивости, в силу симметрии, рассматривали $1/4$ пластины. Использовали центрально-разностные операторы с точностью аппроксимации порядка квадрата шага сетки. Количество внутренних точек конечно-разностной сетки выбирали в зависимости от радиуса отверстия порядка 100—140. Для размеров отверстия $2R/a=0,4$; 0,3; 0,5 критическая нагрузка сжатия равна соответственно $q_{кр}a^2/D=60,5$; 87,5; 181,4. Увеличение $q_{кр}$ объясняется влиянием отверстия на форму выпучивания. Аналогичный эффект возникает при изменении отношения сторон прямоугольной шарнирно опертой пластины, сжатой равномерно по одной из осей ⁽⁷⁾. Определенное влияние оказывает также

перераспределение напряжений. Появляются зоны разгрузки ($\theta=0$, π) и зоны повышенной концентрации напряжений ($\theta=\pm\pi/2$). Анализ показывает, что при размерах отверстия $2R/a \leq 0,65$ распределение напряжений оптимально с точки зрения увеличения критической нагрузки. Для $0,65 \leq 2R/a \leq 0,72$ величина напряжений в зоне повышенной концентрации и сами размеры области достигают такого уровня, когда происходит как бы «местная» потеря устойчивости при $\theta=\pm\pi/2$ симметричной формы, что, конечно, значительно снижает величину $q_{кр}$. При дальнейшем увеличении размеров отверстия наблюдается изменение формы выпучивания на несимметричную ($0,72 \leq 2R/a \leq 0,83$). Для больших отверстий при потере устойчивости область ($-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$) как бы «проваливается» с образованием складок по диагоналям квадрата.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
6 VI 1975

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Clebsch, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris, 1883. ² И. Л. Воробьева, И. Н. Преображенский, В сб. Расчет пространственных конструкций, в. 15, 89 (1973). ³ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1954. ⁴ А. Г. Угодчиков, Тр. Горьковск. инж.-строит. ин-та, в. 39, 5 (1964). ⁵ А. Г. Угодчиков, Н. М. Хуторянский, Прикладная механика, т. 8, № 5, 113 (1972). ⁶ Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., 1963. ⁷ С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, М., 1955.