

Н. Н. ГУДОВИЧ

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 10 XI 1974)

1°. Разностная схема. Рассмотрим задачу

$$u^{(n)}(t) + \sum_{m=0}^{n-1} l_m(t) u^{(m)}(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad (1,1)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \mu_{j,m} u^{(m)}(0) + \eta_{j,m} u^{(m)}(1) = \varphi_j, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad (1,2)$$

где $l_m(t)$, $f(t)$ — заданные функции из $C[0, 1]$ и $\mu_{j,m}$, $\eta_{j,m}$, φ_j — заданные числа. Задача (1,1), (1,2) считается однозначно разрешимой в $C^n[0, 1]$ при любых $f \in C[0, 1]$ и $\varphi = \{\varphi_j\} \in R^n$.

Пусть $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, 1/h$, — узлы сетки на $[0, 1]$ и $u^h = \{u_i^h\}_{i=0}^{1/h}$ — сеточная функция.

Заменим задачу (1,1), (1,2) разностной схемой

$$(\Delta^n u^h)_{i_p} + \sum_{m=0}^{n-1} l_m(t_{i_p}) (\Delta^m u^h)_{i_p} = f(t_{i_p}), \quad 1 \leq p \leq \gamma; \quad (1,3)$$

$$(\Delta^n u^h)_i + \sum_{m=0}^{n-1} l_m(t_i) (\Delta^m u^h)_i = f(t_i), \quad \alpha \leq i \leq 1/h - \beta; \quad (1,4)$$

$$(\Delta^n u^h)_{i_q/h - i_q} + \sum_{m=0}^{n-1} l_m(t_{i_q/h - i_q}) (\Delta^m u^h)_{i_q/h - i_q} = f(t_{i_q/h - i_q}), \quad 1 \leq q \leq \delta; \quad (1,5)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \mu_{j,m} (\Delta^m u^h)_0 + \eta_{j,m} (\Delta^m u^h)_{1/h} = \varphi_j, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad (1,6)$$

где α , β , γ , δ , i_p , i_q — не зависящие от h неотрицательные целые, а

$$(\Delta^m u^h)_i = \frac{1}{h^m} \sum_{j=-s}^l a_j u_{i+j}^h \quad (1,7)$$

есть разностная аппроксимация для m -й производной * в узле t_i с параметрами s , l , a_j , не меняющимися с изменением i в случае (1,4) и меняющимися, вообще говоря, с изменением p , q в случае (1,3), (1,5).

* Выражение (1,7) есть разностная аппроксимация m -й производной в узле t_i ,

если $\frac{1}{h^m} \sum_{j=-s}^m a_j u(t+jh) \rightarrow u^{(m)}(t)$ при $h \rightarrow 0$ для любой функции $u(t) \in C^m(R)$.

Числа α, β, i_p, i_q и параметры s, l, a_j выражений (1,7) условимся считать подобранными так, чтобы уравнения (1,3) — (1,6) не захватывали узлов вне $[0, 1]$; кроме того будем считать выполненным условие $\gamma - \delta = \alpha + \beta - n$, обеспечивающее замкнутость системы (1,3) — (1,6) относительно z . В этих предположениях задачу (1,3) — (1,6) можно записать в виде уравнения $A_h v^h = F_h$ с оператором A_h из пространства сеточных функций $V^h = \{v_i^h\}_{i=0}^{1/h}$ с нормой

$$\|v^h\| = \max_{0 \leq m \leq n} \max_{0 \leq i \leq 1/h - m} |(\bar{\Delta}^m v^h)_i|, \quad (1,8)$$

где $(\bar{\Delta}^m v^h)_i$ есть разностное отношение «вперед» порядка m от v^h в узле t_i ,

$$(\bar{\Delta}^m v^h)_i = \frac{1}{h^m} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j v_{i+j}^h,$$

в пространство той же размерности, состоящее из наборов $(g^h, \psi) = (\{g_p^h\}_{p=1}^{\gamma}, \{g_i^h\}_{i=\alpha}^{1/h-\beta}, \{g_q^h\}_{q=1}^{\delta}, \{\psi_j\}_{j=0}^{n-1})$ с нормой

$$\|(g^h, \psi)\| = \max \{ \max_{1 \leq p \leq \gamma} |g_p^h|, \max_{\alpha \leq i \leq 1/h - \beta} |g_i^h|, \max_{1 \leq q \leq \delta} |g_q^h|, \max_{0 \leq j \leq n-1} |\psi_j| \}. \quad (1,9)$$

Под устойчивостью задачи (1,3) — (1,6) мы будем понимать существование A_h^{-1} при всех достаточно малых h и равномерную по h ограниченность этих операторов в нормах (1,8), (1,9).

2°. Общий критерий устойчивости. Из (2, 3) для (1,7) вытекает представление

$$(\Delta^m u^h)_i = \sum_{j=0}^{l+s-m} d_j (\bar{\Delta}^m u^h)_{i+j-s} \quad (2,1)$$

с коэффициентами d_j , зависящими лишь от $m, s, l, \{a_j\}$ и определяемыми по этим параметрам однозначно.

Многочлен $Q(z) = \sum_{j=0}^{l+s-m} d_j z^j$ называется определяющим многочленом для (1,7).

Представления (2,1) для наборов $\{(\Delta^n u^h)_{i_p}\}_{p=1}^{\gamma}, \{(\Delta^n u^h)_{i_f}\}_{i=\alpha}^{1/h-\beta}, \{(\Delta^n u^h)_{i_q}\}_{q=1}^{\delta}$ порождают определяющий оператор Q_h^n задачи (1,3) — (1,6) (см. (1)), действующий из пространства сеточных функций $x^h = \{x_i^h\}_{i=0}^{1/h-n}$ с нормой $\|x^h\| = \max_{0 \leq i \leq 1/h-n} |x_i^h|$ в пространство наборов $y^h = (\{y_p^h\}_{p=1}^{\gamma}, \{y_i^h\}_{i=\alpha}^{1/h-\beta}, \{y_q^h\}_{q=1}^{\delta})$ с нормой $\|y^h\| = \max \{ \max_{1 \leq p \leq \gamma} |y_p^h|, \max_{\alpha \leq i \leq 1/h - \beta} |y_i^h|, \max_{1 \leq q \leq \delta} |y_q^h| \}$ согласно формулам

$$(Q_h^n x^h)_p = \sum_{j=0}^{l(p) + s(p) - n} d_j(p) x_{i_p + j - s(p)}^h, \quad 1 \leq p \leq \gamma; \quad (2,2)$$

$$(Q_h^n x^h)_i = \sum_{j=0}^{l+s-n} d_j x_{i+j-s}^h, \quad \alpha \leq i \leq 1/h - \beta; \quad (2,3)$$

$$(Q_h^n x^h)_q = \sum_{j=i}^{l(q)+s(q)-n} d_j(q) x_{1/l-i_q+j-s(q)}^h, \quad i \leq q \leq \delta. \quad (2,4)$$

Теорема 2.1 (1). Для устойчивости задачи (1,3)–(1,6) необходимо и достаточно, чтобы $(Q_h^n)^{-1}$ существовали при всех достаточно малых h и были равномерно по h ограничены в смысле норм, введенных выше в областях определения и значений оператора Q_h^n .

Отсюда приходим к критерию устойчивости:

Теорема 2.2. Для устойчивости задачи (1,3) — (1,6) необходимо и достаточно, чтобы при всех достаточно малых h решение $x = \{x_i\}_{i=0}^{1/h-n}$ уравнения

$$d_0 x_{i-s} + d_1 x_{i-s+1} + \dots + d_{l+s-n} x_{i+l-n} = y_i, \quad \alpha \leq i \leq 1/h - \beta, \quad (2,5)$$

с дополнительными условиями

$$d_1(p) x_{i_p-s(p)} + d_1(p) x_{i_p-s(p)+1} + \dots + d_{l(p)+s(p)-n}(p) x_{i_p+l(p)-n} = y_p, \quad 1 \leq p \leq \gamma; \quad (2,6)$$

$$d_0(q) x_{1/h-i_q-s(q)} + d_1(q) x_{1/h-i_q-s(q)+1} + \dots + d_{l(q)+s(q)-n}(q) x_{1/h-i_q+l(q)-n} = y_q, \quad (2,7)$$

$$1 \leq q \leq \delta,$$

удовлетворяло оценке с не зависящей от h , y_p , y_i , y_q константой K :

$$\max_{0 \leq i \leq 1/h-n} |x_i| \leq K \max_{1 \leq p \leq \gamma} \{ \max_{1 \leq p \leq \gamma} |y_p|, \max_{\alpha \leq i \leq 1/h-\beta} |y_i|, \max_{1 \leq q \leq \delta} |y_q| \}.$$

Из теоремы 2.2, в частности, следует

Теорема 2.3. Для устойчивости задачи (1,3) — (1,6) необходимо, чтобы определяющий многочлен $Q(z)$ выражения $(\Delta^n u^h)_i$ из (1,4) не имел корней на единичной окружности.

Указанное в теореме 2.3 необходимое условие устойчивости далее считаем выполненным.

Замечание 2.1. Поскольку Q_h^n определяется лишь аппроксимациями для n -й производной, термин «устойчивость задачи (1,3) — (1,6)» мы заменим термином «устойчивость схемы (1,3) — (1,5)» и при описании разностных схем будем указывать лишь способ замены n -й производной, считая, что младшие производные заменены какими-либо разностными выражениями того же порядка аппроксимации, что и n -я производная.

3°. Метод окаймления. Рассмотрим многочлен

$$Q'(z) = \sum_{j=j_1}^{j_2} d_j z^{j-j_1}, \quad d_{j_1}, d_{j_2} \neq 0, \quad 0 \leq j_1 \leq j_2 \leq l+s-n, \quad (3,1)$$

полученный из определяющего многочлена выражения $(\Delta^n u^h)_i$ из (1,4) отбрасыванием крайних нулевых членов и сокращением на z^{j_1} .

Схема (1,3) — (1,5) по определению есть схема двустороннего вида, если системы (2,6), (2,7) содержат соответственно лишь неизвестные $x_0, x_1, \dots, x_{\gamma-1}$ и $x_{1/h-n+\delta+1}, \dots, x_{1/h-n}$ и имеют обратимые матрицы.

Матрица оператора Q_h^n для схемы двустороннего вида имеет изображенную на рис. 1 структуру, где C и D — обратимые блоки размерностей γ и δ , E и F — нулевые блоки, а L — «лестница», «ступени» которой образованы коэффициентами $d_{j_1}, d_{j_1+1}, \dots, d_{j_2}$ многочлена (3,1).

Занумеруем диагонали матрицы Q_h^n влево и вправо от главной числами $1, 2, \dots$ и $-1, -2, \dots$ соответственно и сопоставим схеме двустороннего вида целое μ , называемое ее типом и равное номеру той диагонали, на которой стоят элементы d_{j_1} . При этом естественно ограничиться лишь рассмотрением схем с $0 \leq \mu \leq j_2 - j_1$, поскольку в противном случае оператор Q_h^n не может быть обратимым.

Теорема 3.1. Для устойчивости схемы (1,3) — (1,5) двустороннего вида с типом μ необходимо и достаточно, чтобы μ корней * многочлена (3.1) лежали внутри, а остальные — вне единичного круга.

Пусть в качестве выражения $(\Delta^n u^h)_i$ в (1,4) принято выражение

$$(\Delta^n u^h)_i = \frac{1}{h^m} \sum_{j=-s}^l a_j u_{i+j}^h = \sum_{j=0}^{l+s-n} d_j (\bar{\Delta}^n u^h)_{i+j-s} \quad (3,2)$$

с порядком аппроксимации h^k (k целое, $k \geq 1$) и пусть μ корней отвечающего этому выражению многочлена (3,1) лежит внутри, а остальные вне единичного круга. Для построения схемы двустороннего вида на основе выражения (3,2) воспользуемся методом окаймления.

Именно, по числам $m=0, 1, \dots, n$ и $s=0, 1, \dots, k-1$ изложенным в (3) способом строим многочлены $Q_{m,s}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} d_j(m, s) z^j$ и отвечающие им выражения

$$(\Delta_s^m u^h)_i = \sum_{j=0}^{k-1} d_j(m, s) (\bar{\Delta}^m u^h)_{i+j-s} = \frac{1}{h^m} \sum_{j=-s}^{m+(k-1)-s} a_j(m, s) u_{i+j}^h$$

порядка аппроксимации h^k .

Уравнение (1,4) аппроксимируем в узле t_0 с использованием $(\Delta_0^m u^h)_0$, в узле t_1 — с использованием $(\Delta_1^m u^h)_1, \dots$, в узле t_{k-1} — с использованием $(\Delta_{k-1}^m u^h)_{k-1}$. Затем выбираем s^* , $0 \leq s^* \leq k-1$, так, чтобы $d_{k-1}(n, s^*) \neq 0$, и аппроксимируем (1,4) в узлах $t_{s^*+1}, t_{s^*+2}, \dots, t_{s^*+k}$ (k^* — не зависящее от h отрицательное целое) с использованием $(\Delta_{s^*}^m u^h)_i$. Полученная группа из $k+k^*$ уравнений принимается в качестве (1,3).

Система (1,5) строится аналогично. Именно, сначала аппроксимируем (1,1) в узлах с номерами $N+s$, $N=1/h-n-k+1$, $0 \leq s \leq k-1$, с использованием $(\Delta_s^m u^h)_{N+s}$, а затем выбираем s^{**} , $0 \leq s^{**} \leq k-1$, так, чтобы $d_k(n, s^{**}) \neq 0$, и аппроксимируем (1,1) в узлах с номерами $N+s^{**}-1$, $N+s^{**}-2, \dots, N+s^{**}-k^{**}$ с использованием $(\Delta_{s^{**}}^m u^h)_i$.

Параметры k^* , k^{**} и числа α, β из (1,4) подбираются так, чтобы схема имела тип μ ; возможность такого выбора легко доказать с помощью рисунков типа рис. 1.

Существование s^* , s^{**} и обратимость блоков C, D (см. рис. 1) для построенной разностной схемы следует из установленной в (1) линейной независимости многочленов $Q_{m,s}(z)$.

Теорема 3.2. Метод окаймления дает устойчивую разностную схему того же порядка аппроксимации, что и исходное выражение (3,2) для n -й производной.

Метод окаймления требует для реализации лишь информацию о расположении корней многочлена (3,1) относительно единичной окружности, но не вычисления самих корней.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
4 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Гудович, ДАН, т. 247, № 2, 264 (1974). ² С. Г. Крейн, Л. Н. Шабуцкая, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 6 № 4, 648 (1966). ³ Н. Н. Гудович, Там же, т. 6, № 4, 760 (1966).

* Каждый корень считается столько раз, какова его кратность.