

С. А. РУСАКОВ

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ n -ГРУПП НЕЧЕТНОГО И БИПРИМАРНОГО ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 20 V. 1975)

1. Основной задачей общей алгебры является, как известно, изучение алгебраических операций с наиболее широкой и общей точки зрения. Эта тенденция хорошо прослеживается в серии фундаментальных работ по теории общих алгебраических систем А. И. Мальцева и в многочисленных исследованиях как по универсальным алгебрам вообще, так и по универсальным алгебрам с одной n -арной операцией.

Частным случаем универсальных алгебр с одной n -арной операцией являются, очевидно, n -группы, или полиадические группы.

Поскольку многие понятия, относящиеся к бинарным группам, переносятся и на n -группы при $n > 2$, то ясно, что между их теориями существует некоторый параллелизм. Однако при $n > 2$ в теории n -групп существует большой круг вопросов, которые специфичны для этой теории и не имеют уже места в бинарном случае. Так, например, n -группа при $n > 2$ не всегда обладает единицей; теорема Силова имеет место только для вполне определенных делителей порядка n -группы и т. д.

Отысканию свойств конечных n -групп, которые не имеют аналогов в теории бинарных групп, и посвящена в основном эта работа. Она состоит из двух частей.

В первой части (см. п. 2) при $n > 2$ устанавливается существование гамильтоновых n -групп, а также исследуется подгрупповое строение дедекиндовых n -групп. При этом доказано, что при $n > 2$ всегда существуют гамильтоновы n -группы без единицы.

Вторая же часть работы (см. п. 3) посвящена изложению результатов о неразрешимости n -групп при $n > 2$ нечетного и бипримарного порядков, причем следует отметить, что результаты первой части работы существенным образом используются во второй.

Необходимые нам в дальнейшем обозначения, понятия и определения можно найти в ⁽¹⁻⁴⁾.

Приведем теперь полученные нами результаты.

2. Введем следующее

Определение 1. n -Группу, все подгруппы которой инвариантны назовем дедекиндовой n -группой.

Неабелеву дедекиндову n -группу назовем гамильтоновой n -группой.

Теорема 1. Для $n = 4k + 1$, где k — произвольное целое положительное число, всегда существует гамильтонова n -группа 8-го порядка без единицы, обладающая подгруппами 2-го и 4-го порядков, причем число подгрупп 2-го порядка равно 4, а число подгрупп 4-го порядка не меньше 3 и не больше 6.

Более того, как установлено с помощью ЭВМ, при $n = 5$ и $n = 9$ эта гамильтонова n -группа содержит точно 6 подгрупп 4-го порядка.

Теорема 2. Пусть $G = R \times S$ — бинарная группа, где R — группа кватернионов и S — циклическая подгруппа группы G , и пусть n — такое четное натуральное число, что $\pi(s) \equiv \pi(n-1)$, где $s = |S| > 1$.

Тогда на G существует такая гамильтонова n -группа, которая содержит по одной подгруппе порядков s и $2s$ и три подгруппы порядка 2^2s и не обладает никакими другими подгруппами, причем все эти подгруппы циклические.

Теорема 3. Пусть G — дедекиндова n -группа порядка $g=rs$, где $(r, s)=1$ и $(r, n-1)=1$. Тогда:

1) G обладает по крайней мере одной подгруппой порядка δs , где δ — произвольный делитель r ;

2) в G существует единственная подгруппа S порядка s ;

3) если S — циклическая подгруппа этой дедекиндовой n -группы G и $\pi(s) \equiv \pi(n-1)$, где $s > 1$, то G не содержит ни одной подгруппы порядка δt , где $1 \leq t < s$ и t делит s .

При доказательстве теоремы 3 существенным образом использовалась наша

Теорема 4. Пусть фактор-группа G/N для конечной n -группы G обладает некоторой подгруппой $\bar{B}$.

Тогда в G существует такая подгруппа B , что $|B| = |N| |\bar{B}|$, причем:

1) если $\bar{B}$ — инвариантная подгруппа G/N , то B будет инвариантной подгруппой G/N ;

2) если $\bar{B}$ — инвариантная подгруппа G/N , то B — инвариантная подгруппа n -группы G .

3. Классическое определение конечной разрешимой бинарной группы как группы, обладающей нормальным рядом с простыми индексами, естественно использовать и для групп любой арности. Поэтому введем следующее

Определение 2. Если существует по крайней мере одна такая подгруппа G_k простого порядка n -группы G , что ее можно соединить с n -группой G нормальным рядом $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_{k-1} \supseteq G_k$, индексы которого $|G_{i-1}|/|G_i|$, $i=1, 2, \dots, k$, являются простыми числами, то G назовем **разрешимой n -группой**.

С помощью теоремы 3 доказывается

Теорема 5. Всякая дедекиндова n -группа G порядка $g=rs$, где $(r, n-1)=1$, $\pi(s) \equiv \pi(n-1)$ и s — составное число, неразрешима, если подгруппа S порядка s циклическая.

Из этой теоремы непосредственно вытекают

Теорема 6. Всякая дедекиндова n -группа G нечетного порядка $g=rs$, где $(r, n-1)=1$, $\pi(s) \equiv \pi(n-1)$, и s — составное число, неразрешима, если подгруппа S порядка s циклическая.

Теорема 7. Всякая примарная дедекиндова n -группа G порядка $p^a q^b$, где $(p, n-1)=1$, $q \equiv \pi(n-1)$ и $\beta > 1$, неразрешима, если подгруппа Q порядка q^b циклическая.

Теорема 6 показывает, что проблема Бернсайда при $n > 2$ решается отрицательно.

4. Наконец, приведем примеры к теоремам 5–7.

1°. Пусть $G = R \times S$ — бинарная группа, где R — группа кватернионов и S — циклическая подгруппа группы G , и пусть n — такое четное натуральное число, что $\pi(s) \equiv \pi(n-1)$, где $s = |S|$ — составное число.

Тогда на основании теоремы 2 на G существует такая гамильтонова n -группа G , которая содержит по одной подгруппе S и H соответственно порядков s и $2s$ и три подгруппы F_1 , F_2 и F_3 порядка 2^2s и не обладает никакими другими подгруппами, причем все эти подгруппы циклические.

Так как всякая подгруппа гамильтоновой n -группы является дедекиндовой n -группой, то на основании теоремы 3 заключаем, что $G \supset F_i \supset H \supset S$, $i=1, 2, 3$, причем очевидно, что каждый такой ряд является нормальным рядом для n -группы G и $|G|/|F_i| = |F_i|/|H| = |H|/|S| = 2$, $i=1, 2, 3$. Поскольку данная n -группа G не обладает никакими другими нормальными рядами и s — составное число, то ясно, что G — неразрешимая n -группа. Тем самым получен пример к теореме 5.

Полагая теперь $s=q^\beta$, где q — простое число и $\beta > 1$, заключаем, что $|G|=2^3 q^\beta$ и, следовательно, G неразрешима (пример к теореме 7).

2°. Пусть G — конечная абелева бинарная группа, R и S — такие ее подгруппы, что $G=R \times S$, где S — циклическая подгруппа группы G , и пусть n — такое натуральное число, что $(r, n-1)=1$ и $\pi(s) \leq \pi(n-1)$, где $|R|=r$, $|S|=s$ — составное число.

Легко показать, что на G можно построить абелеву n -группу G без единицы порядка $g=rs$, причем в этой n -группе существует единственная циклическая подгруппа S порядка s . Тогда на основании теоремы 5 n -группа G неразрешима.

При нечетном g получаем пример к теореме 6.

Если же положить $r=p^\alpha$ и $s=q^\beta$, где p и q — различные простые числа, $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$, то приходим к выводу, что $|G|=p^\alpha q^\beta$ и G неразрешима (пример к теореме 7).

В заключение выражаю искреннюю благодарность Н. А. Журомской за создание алгоритма для обнаружения подгрупп у гамильтоновых 5-, 9-групп 8-го порядка и реализацию его на ЭВМ.

Гомельский филиал
Института математики
Академии наук БССР

Поступило
9 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Д. Белицкий, n -арные квазигруппы, Кишинев, 1972. ² А. Г. Курош, Общая алгебра. Лекции 1968—1970 учебного года, М., «Наука», 1974. ³ С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, Минск, «Наука и техника», 1964. ⁴ С. А. Русаков, ДАН, т. 193, № 5, 1966, 1970.