

УДК 517.955.213

МАТЕМАТИКА

Э. М. СААК

ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, БЛИЗКИХ К ЭЛЛИПСОИДУ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 5 VI 1975)

Известно ⁽²⁾, что для достаточно «малой» области однородная задача Дирихле для уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, иначе говоря, абсолютные величины собственных чисел оператора Лапласа ограничены снизу от нуля.

В настоящей работе, основанной на идее устойчивости задачи Дирихле относительно вариации области ^(1, 3), дается оценка собственных чисел оператора Лапласа через некоторые геометрические характеристики области и выясняется, что появление у области «узких выступов» не приводит к заметному уменьшению нижней границы абсолютных величин собственных чисел оператора Лапласа.

Аналогичный результат устанавливается для общего эллиптического дифференциального оператора 2-го порядка дивергентного вида.

Введем необходимые обозначения и определения. Через Ω обозначается ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве R^n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ и т. д.

Через $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ обозначается пополнение множества всех бесконечно гладких финитных в Ω функций $u(x)$ по норме

$$\|u\|_1 = \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right\}^{1/2},$$

где ∇ — градиент.

Через $\dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ обозначается пополнение множества $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{-1} = \sup_{\|v\|_1 \leq 1} \int_{\Omega} u(x) v(x) d\Omega.$$

Лемма 1. Оператор Лапласа Δ изометрично отображает $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ на $\dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем для любого $u \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$

$$\|\Delta u\|_{-1} = \sup_{\|v\|_1 \leq 1} \int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \sup_{\|v\|_1 \leq 1} \left(- \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \right) = \|u\|_1,$$

что и утверждалось.

Через $u_\Omega(x)$ обозначим элемент из $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ такой, что $\Delta u_\Omega(x) = 1$ $\forall x \in \Omega$. Иначе говоря,

$$u_\Omega(x) = \int_\Omega G_\Omega(x, y) d\Omega_y, \quad (1)$$

где $G_\Omega(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа и области Ω .

Положим еще

$$\rho^2(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} |u_\Omega(x)|. \quad (2)$$

Через Δ^{-1} обозначим обратный к Δ оператор, отображающий изометрично $\dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ на $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ согласно лемме 1.

Лемма 2. Норма $\|\Delta^{-1}\|$ оператора Δ^{-1} , действующего из пространства $\dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ в это же пространство, допускает оценку

$$\|\Delta^{-1}\| \leq \rho^2(\Omega). \quad (3)$$

Доказательство. Установим «неравенство вложения»

$$\|u\|_{-1} \leq \rho^2(\Omega) \|u\|_1, \quad \forall u \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega). \quad (4)$$

Имеем

$$\|u\|_{-1} = \sup_{\|\Delta v\|_1 < 1} \int_\Omega u \Delta v d\Omega = \sup_{\|\Delta v\|_1 < 1} \left(- \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \right) \leq \|u\|_1 \sup_{\|\Delta v\|_1 < 1} \|v\|_1. \quad (5)$$

Для оценки второго множителя воспользуемся представлением

$$\nabla v(x) = \int_\Omega [\nabla \Delta v(y)] G_\Omega(x, y) d\Omega_y, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

справедливым для любой финитной в Ω функции $v(x)$. Имеем из (1), (6)

$$|\nabla v(x)|^2 \leq \left(\int_\Omega |\nabla \Delta v(y)|^2 G_\Omega(x, y) d\Omega_y \right) u_\Omega(x),$$

откуда согласно (2)

$$\|v\|_1 \leq \|\Delta v\|_1 \rho^2(\Omega).$$

Сопоставляя это выражение с (5), получаем (4). Имеем теперь в силу (4) и леммы 1

$$\|\Delta^{-1}u\|_{-1} \leq \rho^2(\Omega) \|\Delta^{-1}u\|_1 = \rho^2(\Omega) \|u\|_{-1},$$

и лемма 2 доказана.

Если $f(x)$ — непрерывная функция в R^n , то через $u_{f, \Omega}(x)$ будем обозначать гармоническую в области Ω функцию, совпадающую с $f(x)$ вне Ω , в предположении, что такая существует.

Лемма 3. Пусть Ω' и Ω_δ — две области. Пусть $\Omega' = \inf E$ — множество внутренних точек компакта E . Пусть $E \subset \Omega_\delta$, причем для каждой граничной точки y компакта E существует точка $y^{(6)}$ вне $\bar{\Omega}_\delta$ такая, что $|y - y^{(6)}| < \delta$, $\inf |y^{(6)} - x| \geq c\delta$, где c — не зависит от δ , $0 < \delta < 1$.

Тогда справедливо неравенство

$$|u_{f, \Omega'}(x) - u_{f, \Omega_\delta}(x)| \leq c_1 \omega(\delta) \quad \forall x \in R^n,$$

где c_1 не зависит от x , $f(x)$ и δ , а $\omega(\delta)$ есть сумма модулей непрерывности функций $f(x)$ и $u_{f, \Omega_\delta}(x)$.

Доказательство может быть получено по методу работы (3).

Теорема. Пусть область Ω' является внутренностью эллипсоида:

$$\Omega' = \left\{ x: \sum_{i=1}^n a_i^{-2} x_i^2 < R^2 \right\},$$

где $a_i = \text{const} > 0$, $R = \text{const} > 0$.

Пусть компакт E и область $\Omega = \Omega_\delta$ удовлетворяют условиям леммы 3. Тогда норма $\|\Delta^{-1}\|$ оператора Δ^{-1} , действующего из пространства $\dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ в это же пространство, допускает оценку

$$\|\Delta^{-1}\| \leq {}^{1/2}R^2 / \sum_{i=1}^n a_i^{-2} + \varepsilon(\delta),$$

где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. С учетом оценки (3) и леммы 3 имеем

$$\|\Delta^{-1}\| \leq \rho^2(\Omega') + \varepsilon(\delta). \quad (7)$$

Для вычисления $\rho^2(\Omega')$ воспользуемся явным видом функции $u_{\Omega'}(x)$ в случае эллипсоида Ω' :

$$u_{\Omega'}(x) = {}^{1/2} \sum_{i=1}^n a_i^{-2} x_i^2 / \sum_{i=1}^n a_i^{-2} {}^{1/2}R^2 / \sum_{i=1}^n a_i^{-2}.$$

Будем иметь

$$\rho^2(\Omega') = \sup_{x \in \Omega} |u_{\Omega'}(x)| = {}^{1/2}R^2 / \sum_{i=1}^n a_i^{-2}. \quad (8)$$

Из (7), (8) следует доказываемая оценка.

Примечание. Поскольку спектральный радиус ограниченного оператора оценивается через его норму, то доказанная теорема дает оценку снизу для абсолютных величин собственных чисел оператора Лапласа в пространствах $\dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ и $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Одновременно она решает и аналогичный вопрос для эллиптического дифференциального оператора дивергентного вида 2-го порядка:

$$A = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

в силу подобия операторов A и Δ в пространстве $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$:

$$A = \Delta \tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ — автоморфизм пространства $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Таганрогский радиотехнический институт
им. В. Д. Калмыкова

Поступило
19 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. В. Келдыш, УМН, т. 8, 171 (1941). ² В. В. Немыцкий, Матем. сб., т. 41, 438 (1934). ³ Г. М. Саак, Дифференциальные уравнения, т. 10, № 3, 507 (1974).