

В. Н. СОЛЕВ

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 V 1975)

Пусть $\xi(t)$ — комплексный стационарный (в узком смысле) процесс с непрерывным временем ($-\infty < t < \infty$). Говорят ⁽¹⁾, что процесс ξ принадлежит классу $S^{(n)}$, если $E|\xi(t)|^k < \infty$, $k \leq n$. Пусть $\xi \in S^{(2)}$, $Z(d\lambda)$ — ортогональная векторная мера, участвующая в спектральном разложении процесса ξ :

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z(d\lambda). \quad (1)$$

Введем в рассмотрение функцию $M_{k,l}$, заданную на прямоугольниках Λ вида $\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_{k+l}$ с измеримыми сторонами Λ_i (Λ_i — измеримое множество в R^1), полагая

$$M_{k,l}(\Lambda) = EZ(\Lambda_1) \times \dots \times Z(\Lambda_k) \times \overline{Z(\Lambda_{k+1})} \times \dots \times \overline{Z(\Lambda_{k+l})} \quad (2)$$

(правая часть в (2) конечна, если $\xi \in S^{k+l}$). Говорят, что процесс ξ принадлежит классу $\Phi^{(n)}$, если $\xi \in S^{(n)}$ и функции $M_{k,l}$ ($k+l \leq n$) продолжимы до счетно-аддитивной вполне конечной меры в R^n . В этом случае функцию $M_{k,l}$ называют спектральной мерой процесса ξ порядка (k, l) .

Пусть $t = (t_1, \dots, t_k) \in R^k$, $s = (s_1, \dots, s_l) \in R^l$. Если $\xi \in S^{k+l}$, положим

$$R(t, s) = E\xi(t_1) \dots \xi(t_k) \overline{\xi(s_1)} \dots \overline{\xi(s_l)}.$$

Если процесс $\xi \in \Phi^{k+l}$, то, как нетрудно понять,

$$R(t, s) = \int \dots \int \exp\{i(\langle t, \lambda \rangle - \langle s, \nu \rangle)\} M_{k,l}(d\lambda, d\nu), \quad (3)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in R^k$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l) \in R^l$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в R^n ($n=1, \dots$). Процесс ξ , $\xi \in S^{(n)}$, будем называть стационарным в широком смысле (порядка n), если

$$R(t', s') = R(t, s),$$

когда $t'_i - t_i = s'_j - s_j = h$ ($i=1, \dots, k$; $j=1, \dots, l$; $l+k \leq n$).

Как известно, в случае стационарного в широком смысле процесса ξ (соответствующего порядка) спектральная мера $M_{k,l}$ сосредоточена на гиперплоскости $\lambda_1 + \dots + \lambda_k - \nu_1 - \dots - \nu_l = 0$. Это обстоятельство просто усмотреть из формулы (3).

Будем говорить, что мера $\mu(dx_1, \dots, dx_n)$ симметрична, если она инвариантна относительно любой перестановки T координат, т. е. $\mu(TS) = \mu(S)$ для любого измеримого подмножества S в R^n .

Следующая теорема отвечает на вопрос, каковы спектральные меры порядка $M_{k,l}$, $k+l=3$, отвечающие стационарным в широком смысле процессам. Для определенности пусть $k>l$.

Теорема. Пусть μ — счетно-аддитивная вполне конечная мера в R^3 , симметричная по первым n координатам и сосредоточенная на гиперплоскости $x_1 + \dots + x_k - x_{k+1} - \dots - x_{k+l} = 0$, $k+l=3$.

Тогда найдется такой стационарный в широком смысле процесс третьего порядка ξ , $\xi \in \Phi^{(3)}$, для которого мера μ будет спектральной мерой порядка (k, l) .

Заметим, что спектральные меры $M_{k,l}$ порядка (k, l) , симметричны по первым k аргументам.

Доказательству теоремы мы предположим простую лемму.

Пусть $K = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — счетное множество, K^* — второй экземпляр K , элементы которого, чтобы их отличать от элементов K , мы индексируем значком $*$, так что если $x \in K$, то $x^* \in K^*$. Обозначим через G свободное коммутативное кольцо с образующей $K \cup K^*$ и через H — алгебру над полем комплексных чисел, построенную по G . В алгебре H вводится естественная инволюция $*$: $H \rightarrow H$, по которой, если $x \in K$, x^* — второй экземпляр x из K^* , то $[x]^* = x^*$, $[x^*]^* = x$. Присоединим к G единицу e , полагая $\hat{G} = G \cup e$. Обозначим через $\hat{H}$ алгебру над полем комплексных чисел, построенную по $\hat{G}$. Пусть $H_{n,m}$ — линейное подмножество из $\hat{H}$, построенное по полиномам степени не выше m от переменных x_j , $j \leq n$, а $\hat{H}_n = \bigcup_{m=0}^\infty H_{n,m}$.

Лемма. Пусть L — линейное подмножество алгебры H , причем $L \subset \hat{H}_n$ при некотором n ; и пусть на L задана функция f , удовлетворяющая условиям:

- 1) $f(xx^*) \geq 0$, $xx^* \in L$;
- 2) если $x \in L$, $xx^* \in L$, то $|f(x)|^2 \leq f(xx^*)$;
- 3) если $xy^* \in L$, $xx^* \in L$, $yy^* \in L$, то

$$|f(xy^*)|^2 \leq |f(xx^*)f(yy^*)|;$$

- 4) при каждом n

$$\sup_{yy^* \in L \cap \hat{H}_{n,n}} |f(xy^*)| < \infty.$$

Тогда функционал можно продолжить с сохранением свойств 1)–4) на всю алгебру $\hat{H}$.

Выведем сначала теорему из леммы. Для определенности рассмотрим случай, когда тип спектральной меры (2. 1). Пусть μ — счетно-аддитивная вполне конечная мера, сосредоточенная на подпространстве $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ и симметричная, а K — система отрезков с рациональными концами. Определим функционал f на линейном подмножестве L , порожденном элементами z вида $z = xyu^*$, $z = xu^*$, $x \in k$, $y \in k$, $u \in k$, из соотношений

$$\begin{aligned} f(xy u^*) &= \mu(x \times y \times z), \\ f(xu^*) &= 0. \quad x \in k, \end{aligned}$$

продолжая его далее на L по линейности. По лемме линейный функционал f можно продолжить на алгебру $\hat{H}$ так, что будут выполняться условия 1)–4). Факторизуя $\hat{H}$ по линейному подмножеству $\{x: f(xx^*) = 0\}$, мы превратим его, в силу условий 1)–3), в предгильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y) = f(x, y^*)$.

Сохраним обозначение $\hat{H}$ для пополнения по норме $\|x\| = \sqrt{f(x, x^*)}$ факторизованного пространства. Определим в $\hat{H}$ линейный оператор A_x , $x \in \hat{H}$, полагая $A_x u = xu$, $u \in \hat{H}$. Заметим, что все операторы A_x , $x \in \hat{H}$, определены на одном плотном в $\hat{H}$ линейном множестве $\hat{H}$, являющемся образом при упомянутой факторизации линейного множества $\bigcup_n H_{n,n}$, как это следует из условия 4). Коммутативная алгебра A операторов A_n по теореме фон Неймана допускает единую диагонализацию. Т. е. существует изоморфизм $U: A \xrightarrow{u} \hat{A}$, алгебры A на некоторую алгебру функций $\hat{A}$, действующих в гильбертовом пространстве $L^2(dm)$. Поскольку при этом определен лишь тип меры dm , мы можем считать, что dm — вероятностная мера. Пусть V — по-

рожденная этим изоморфизмом изометрия из $\hat{H}$ в $L^2(dm)$, пусть далее $x \mapsto \hat{x}$. Обозначим через T каноническое вложение K в $\hat{H}$. Положим $Z(\Delta) = VT(\Delta)$, $\Delta \in K$. Заметим, что векторная функция Z удовлетворяет следующим условиям:

1) $EZ(\Delta_i)\overline{Z(\Delta_j)} = 0$, если $\Delta_i, \Delta_j \in k$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \{\emptyset\}$ (здесь $EZ = \int Z dm$, $z \in L^2(dm)$);

2) $E|Z(\Delta)|^2 < \infty$, $\Delta \in K$;

$$3) EZ(\Delta_1)Z(\Delta_2)\overline{Z(\Delta_3)} = \int Z(\Delta_1)Z(\Delta_2)\overline{Z(\Delta_3)} dm = \\ = f([T\Delta_1][T\Delta_2][T\Delta_3]^*) = \mu(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Из 1), 2) следует, что функцию Z можно продолжить до ортогональной векторной меры в R^1 . Положим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z\{d\lambda\}.$$

Из 3) следует, что μ — спектральная мера порядка (2, 1) процесса ξ . Поскольку Z — ортогональная мера, а мера μ сосредоточена на диагонали $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, то процесс стационарен в широком смысле.

Доказательство леммы. Присоединим к кольцу G единичный элемент e . Пусть H — тривиальная алгебра, порожденная этим элементом. Как известно (2), из 2) следует, что функционал f можно продолжить на $H_0 + L$ с сохранением свойств 1)–4). Пусть построено продолжение f_n функционала f на $H_0 + L$, удовлетворяющее условиям 1)–4); покажем, что тогда существует продолжение f_{n+1} функционала f_n на $L + H_{n+1}$ с сохранением свойств 1)–4).

Положим $x = x_n - x_n^*$, $v = i(x_n - x_n^*)$. Пусть $H_{u(v)}$ — алгебра многочленов от переменной v . Положим $S = \hat{H}_n \otimes H_{u(v)}$. Функционал f индуцирует на тензорном произведении линейный функционал f_0

$$f_0(x \otimes y^*) = f(xy^*), \quad x \in \hat{H}_n, \quad y \in H_u.$$

Функционал f_0 определен по крайней мере на линейном подмножестве $\hat{H}_n \otimes H_u$. Пусть имеется продолжение f_x на некоторое линейное множество $\bar{S}$ из S и пусть элемент $Z = xy^*$, $x \in \hat{H}_n$, $y^* \in H_u$ не лежит в $\bar{S}$. Легко понять, что можно определить f_0 на $Z = xy^*$ так, чтобы продолжение f_0 на линейную оболочку $\bar{S}$ и Z удовлетворяло (в понятном смысле) условиям 1)–4). С другой стороны, если есть монотонная последовательность $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ продолжений f_0 , удовлетворяющих условиям 1)–4), то существует линейный функционал f_x , сужением которого являются все функционалы f_j , причем f_0 удовлетворяет условиям 1)–4). Поэтому, обращаясь к лемме Цорна, получаем, что f_0 можно продолжить на все S . Точно так же доказывается возможность продолжения функционала f_0 на $\hat{H}_n \otimes \{H_u + H_v\}$ и, следовательно, возможность продолжения (с сохранением свойств 1)–4)) функционала f на $\hat{H}_{n+1}$, а следовательно, и на $L + \hat{H}_{n+1}$.

Докажем теперь, что, если $\{f_n\}$ — последовательность функционалов, определенных на $\hat{H}_n$ и удовлетворяющих там условиям 1)–4), то при условии $f_{n+1} \geq f_n$ (т. е. f_n — сужение f_{n+1} на $\hat{H}_n$) существует линейный функционал f_x , заданный на $\bigcup_0^{\infty} \hat{H}_n$ и удовлетворяющий там условиям 1)–4). Таким свойством обладает функционал f_0 , определенный на каждом из $\hat{H}_n$ равенством $f_0 = f_n$.

Доказательство леммы закончено.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
12 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Ширяев, Теория вероятностей и ее применения, т. 5, в. 3, 293 (1960).
² Ж. Динсье, C^* -алгебры и их представления, М., 1974.